

**UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS**

**FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS**

**UNIDAD DE POSGRADO**

**Algunas aplicaciones y extensión del método del  
subgradiente**

**TESIS**

Para obtener el grado académico de Magíster en Matemática  
Aplicada con mención en Matemática Computacional

**AUTOR**

Frank Navarro Rojas

**ASESOR**

Tomás Alberto Núñez Lay

**Lima – Perú**

**2013**

# **ALGUNAS APLICACIONES Y EXTENSION DEL METODO DEL SUBGRADIENTE**

Frank Navarro Rojas

Tesis presentada a consideración del Cuerpo Docente de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, como parte de los requisitos para obtener el Grado Académico de Magíster en Matemática Aplicada. Aprobada por el siguiente jurado:

---

Dra. Roxana López Cruz  
Presidenta

---

Dr. Victor Rafael Cabanillas Zannini  
Miembro

---

Dr. Renato Mario Benazic Tome  
Miembro

---

Dr. Eladio Teófilo Ocaña Anaya  
Miembro

---

Mg. Tomás Alberto Núñez Lay  
Miembro Asesor

## FICHA CATALOGRÁFICA

NAVARRO ROJAS, FRANK

Título: Algunas Aplicaciones y Extensión del Método del Subgradiente , (Lima)  
2013.VIII,p,29.7cm (UNMSM, Magíster, Matemática Aplicada, 2013)

Tesis, Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Escuela de posgrado. Facultad de  
Ciencias Matemáticas. Unidad de posgrado.

1. Matemática Aplicada    2. Optimización

I. UNMSM/EPG/FCM/UPG    II. Magíster (Serie)

## Agradecimientos

Quiero agradecer a los miembros del jurado por las sugerencias para mejorar la calidad del trabajo en particular a mi orientador el profesor Tomás Núñez por su paciencia y su confianza en mi persona en la realización del trabajo, agradecerle también por las enseñanzas durante el pregrado y el posgrado en la que tuve la oportunidad de llevar 7 cursos con él, en estos años de estudios en San Marcos.

Quiero también agradecer a mi familia por el apoyo emocional que es importante especialmente a mi madre que siempre me apoyó en todo y a mis amigos por los alientos.

Quiero dedicar este trabajo al **Ser Superior** que permite que las cosas sucedan en esta vida y a mí mismo por el esfuerzo realizado.

# **ALGUNAS APLICACIONES Y EXTENSION DEL METODO DEL SUBGRADIENTE**

**FRANK NAVARRO ROJAS**

Marzo-2013

Asesor: Mg.Tomás Alberto Núñez Lay

Título obtenido: Magister en matemática Aplicada

## **Resumen:**

El objetivo de este trabajo es hacer un estudio del método subgradiente, que es un método usado para la minimización de funciones convexas no necesariamente diferenciables. Presentamos el método para el caso con restricciones como para el caso irrestricto, presentamos resultados de convergencia para los diferentes tamaños de pasos más usados y estudiamos variantes para las dificultades que pueden acontecer en el método

También estudiamos un algoritmo para resolver desigualdades variacionales definidas por un operador monótono e un conjunto convexo y cerrado, se prueba un resultado de convergencia asumiendo que el operador es monótono maximal y paramonotono. Y por ultimo extendemos el algoritmo del subgradiente para el caso de funciones cuasiconvexas asumiendo la condición de ser Holder sobre el conjunto optimal, probando que la sucesión generada converge a un punto óptimo.

## **PALABRAS CLAVES:**

Método del Subgradiente

Análisis no diferenciable

Desigualdades variacionales

Analisis convexo

Métodos para optimización no diferenciable

# SOME APPLICATIONS AND EXTENSION OF THE SUBGRADIENT METHOD

FRANK NAVARRO ROJAS

March-2013

Advisor: MSc.Tomás Alberto Núñez Lay  
Obtained Title: Master in Applied Mathematics

## **Abstract:**

The objective of this work is to study the subgradient method, which is a method used to minimize not necessarily differentiable convex functions.

We present a method for the case restricted to the unrestricted case, we present results of convergence for the different sizes of commonly used steps and study alternatives for the difficulties that may occur in the method

Also study an algorithm for solving variational inequalities defined by a monotone operator and a convex closed set, a result of convergence assuming that the operator is monotone and maximal paramonotono is tested.

And finally the algorithm Subgradient is extend to the case of functions cuasiconvexas assuming the condition of being Holder on the optimal set, proving that the generated sequence converges to an optimal point.

## **KEYWORDS:**

Subgradient Method  
Analysis not differentiable  
Variational inequalities  
Convex analysis  
Methods for optimization not differentiable

# Índice

INTRODUCCIÓN	1
<b>1. Preliminares</b>	<b>3</b>
1.1. Resultados sobre Convexidad y Análisis en $\mathbb{R}^n$	3
1.2. Problema General de Optimización	22
1.3. Resultados de Existencia de Soluciones Óptimas	23
1.4. Optimización diferenciable no lineal	25
1.4.1. Optimización irrestricta	26
1.4.2. Optimización convexa	28
1.4.3. Optimización con restricciones	30
1.4.4. Expresión de un cono tangente	32
1.4.5. Condiciones de optimalidad de Karusk-Khun-Tucker-Lagrange	34
1.5. Métodos usuales para problemas de optimización	35
1.5.1. Método para problemas diferenciables	35
1.5.2. Métodos para problemas no diferenciables	41
<b>2. Subgradiente</b>	<b>43</b>

2.1.	Derivadas direccionales . . . . .	43
2.2.	Subgradientes y subdiferenciales . . . . .	45
2.3.	$\epsilon$ - Subgradientes . . . . .	56
2.4.	Condiciones de optimalidad . . . . .	58
<b>3.</b>	<b>Método del Subgradiente</b>	<b>60</b>
3.1.	Método del subgradiente . . . . .	60
3.2.	Aplicaciones y ejemplos numéricos . . . . .	76
3.3.	El Método de desviación del subgradiente . . . . .	100
3.4.	El Método condicional del subgradiente . . . . .	108
<b>4.</b>	<b>Un Algoritmo Para Problemas de Desigualdad Variacional</b>	<b>117</b>
4.1.	Introducción y Preliminares . . . . .	117
4.2.	El Algoritmo . . . . .	123
4.3.	Convergencia y Análisis del algoritmo . . . . .	124
4.4.	Ejemplo numérico . . . . .	128
<b>5.</b>	<b>Una Extensión del Método Subgradiente al Caso Cuasiconvexo</b>	<b>130</b>



5.1. Introducción . . . . .	130
5.2. Hipótesis y Planteamiento del problema . . . . .	131
5.3. El algoritmo y el análisis de la convergencia . . . . .	132
5.4. Ejemplos numéricos . . . . .	134
<b>6. Conclusiones</b>	<b>137</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>138</b>

# Introducción

La Optimización es una área de la Matemática que trata en gran parte con problemas cuyo interés consiste en encontrar puntos de máximo o de mínimo de funciones. La optimización puede ser dividida en diferenciable y no diferenciable. En el caso de la optimización diferenciable, se trabaja con problemas donde las funciones objetivo y aquellas que determinan las restricciones del conjunto factible poseen derivadas en todos los puntos de una región que contiene al conjunto factible, en cuanto que en optimización no diferenciable se trabaja con problemas cuyas funciones no poseen derivadas en algunos puntos de su dominio. Este trabajo está enfocado en este último tipo de problemas. En general, los métodos de optimización son métodos iterativos, los que a partir de un punto inicial, construyen una sucesión de puntos que se aproximan a la solución óptima del problema.

En aplicaciones prácticas de optimización, como en economía, teoría de control, relajación Lagrangeana y otras, a menudo se presentan situaciones donde la función objetivo a ser minimizada o maximizada no es necesariamente diferenciable.

Trabajaremos en optimización convexa cuyas funciones objetivas son convexas y no asumiremos hipótesis de diferenciability.

Para resolver esta clase de problemas son necesarias técnicas que reemplacen a las del cálculo diferencial clásico. Estas técnicas son derivadas de una área de la matemática llamada Análisis Convexo. En el caso de funciones no convexas se extienden los conceptos del Análisis convexo para funciones localmente lipschitzianas.

En optimización no diferenciable, existen puntos del dominio donde la función objetivo no posee gradiente y en consecuencia tampoco matriz Hessiana, así, aplicar métodos clásicos para resolver problemas diferenciables en problemas no diferenciables se torna inviable. En estos casos se suele tratar de adaptar los métodos clásicos para funciones no diferenciables.

Por ejemplo, los Métodos Gradientes pueden ser modificados para funciones convexas no diferenciables reemplazando la dirección opuesta al gradiente por la dirección opuesta a un subgradiente, como una dirección de búsqueda para el caso convexo.

Los métodos de optimización clásicos en la mayoría de veces utilizan una recurrencia de la forma  $x_{k+1} = x_k - l_k d_k$  donde  $l_k$  es el tamaño de paso y  $d_k$  es la dirección de búsqueda.

Dentro de la clase de métodos para optimización no diferenciable para funciones convexas se destaca el método del subgradiente, este método fue elaborado por Naum.Z. Shor, en la Unión Soviética, en la década de los 60, y fue uno de los primeros métodos de optimización no diferenciable.

Estos métodos poseen una estructura simple, de la forma  $x_{k+1} = x_k - l_k d_k$ , donde  $d_k$  es un subgradiente de la función objetivo en  $x_k$ , pero en general, son de baja velocidad de convergencia.

Los métodos subgradientes usan el opuesto de un subgradiente como una dirección

de búsqueda, la cual no es necesariamente una dirección de descenso, así no se puede tener una garantía de la convergencia del método. Para poder obtener resultados de convergencia se elijen los tamaños de paso  $l_k$  de manera conveniente.

El propósito de este trabajo es mostrar y desarrollar el método de optimización del subgradiente, sus variantes y algunas aplicaciones. Este método es usado para solucionar problemas en optimización convexa no diferenciable.

En el capítulo 1 recordamos los principales conceptos sobre optimización y análisis convexo que serán usados en el desarrollo del trabajo.

En el capítulo 2 desarrollamos el método del subgradiente, en primera instancia, es presentado para el caso irrestricto, es decir, cuando se considera el conjunto factible  $\mathbb{R}^n$ . En muchas situaciones prácticas necesitamos considerar solo un subconjunto propio  $C$  de  $\mathbb{R}^n$ , así se presenta el problema de adaptar el método al caso con restricciones.

En el capítulo 3 presentamos un algoritmo propuesto en [14] para resolver problemas de desigualdades variacionales en  $\mathbb{R}^n$  usando proyecciones inexactas, este algoritmo se puede ver como una extensión del clásico método del gradiente proyectado.

En el capítulo 4 extendemos el método del subgradiente a una clase más amplia de funciones que las funciones convexas: las funciones cuasiconvexas, en este trabajo nos plantearemos dicho problema bajo la hipótesis adicional de que la función es Holder sobre el conjunto optimal.

Se realizara la implementación computacional de los algoritmos propuestos usando Matlab y experimentos numéricos para mostrar la performance de los algoritmos propuestos.

# CAPITULO I

## 1. Preliminares

### 1.1. Resultados sobre Convexidad y Análisis en $\mathbb{R}^n$

**Definición 1.1** Un subconjunto  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  es llamado convexo si:  $\alpha x + (1 - \alpha)y \in C$ , para cualesquiera  $x, y \in C$ ,  $\alpha \in [0, 1]$ .

Por convención, el conjunto vacío es convexo.

**Teorema 1.1** Se cumplen:

1. La intersección arbitraria de conjuntos convexos es convexa.
2. Si  $C_1, C_2$  son conjuntos convexos entonces  $C_1 + C_2$  también lo es.
3. Si  $\lambda \in \mathbb{R}$  y  $C$  es un conjunto convexo entonces  $\lambda C$  es convexo, además si  $\lambda_1, \lambda_2$  son positivos entonces  $(\lambda_1 + \lambda_2)C = \lambda_1 C + \lambda_2 C$ .
4. La cerradura y el interior de un conjunto convexo son convexos.
5. La imagen y la imagen inversa de un conjunto convexo bajo una función afín son convexas.

**Prueba.** Ver [1].

**Definición 1.2** Sea  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  un conjunto no vacío. Una combinación convexa de elementos de  $X$  es un vector de la forma:  $\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i$  donde  $m$  es un entero positivo,  $x_1, x_2, \dots, x_m$  son elementos de  $X$  y  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  son escalares que satisfacen  $\alpha_i \geq 0$ , y  $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$ .

**Teorema 1.2** (*Caracterización de conjuntos convexos*). Un conjunto  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  es convexo si y solo si toda combinación lineal convexa de elementos de  $C$  pertenece a  $C$ .

**Prueba.** Ver [3].

Sea  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ , por  $K(A)$  denotaremos al conjunto de todas las combinaciones convexas de puntos de  $A$ . Es inmediato ver que  $K(A)$  es convexo y  $K(A) \supseteq A$ .

**Definición 1.3** La cápsula convexa de  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ , denotado por  $co(A)$ , es la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a  $A$ .

Como  $\mathbb{R}^n$  es convexo entonces  $co(A)$  es no vacío y convexo por ser intersección de conjuntos convexos, es inmediato ver que  $co(A)$  es el conjunto convexo mas pequeño que contiene a  $A$ .

**Teorema 1.3** La cápsula convexa de  $A$ ,  $co(A)$ , es el conjunto de combinaciones convexas de elementos de  $A$  esto es  $K(A) = co(A)$ .

**Prueba.** Ver [3].

### Ejemplo 1.1

Consideremos el triángulo  $\Delta$  de vertices  $x, y, z$  y sea  $A = \{x, y, z\}$ , ver Figura (1).

Si  $p \in \Delta$  entonces  $p = \alpha x + (1 - \alpha)w$  para algún  $\alpha \in [0, 1]$ , pero además  $w = \beta z + (1 - \beta)y$  para algún  $\beta \in [0, 1]$  reemplazando  $w$  en la expresión para  $p$  obtenemos :

$p = \alpha x + (1 - \alpha)(\beta z + (1 - \beta)y) = \alpha x + (1 - \alpha)\beta z + (1 - \alpha)(1 - \beta)y$  denotando  $\delta = \alpha$ ,  $\phi = (1 - \alpha)(1 - \beta)$ ,  $\eta = (1 - \alpha)\beta$  entonces  $p = \delta x + \phi y + \eta z$  es inmediato ver que  $\delta, \phi, \eta \geq 0$  y  $\delta + \phi + \eta = 1$ , así  $\Delta \subseteq co(A)$  y como  $\Delta$  es convexo entonces  $co(A) = \Delta$ .

Luego si  $A = \{x, y, z\}$  con elementos distintos, se tiene que  $co(A) = \Delta$ , el triángulo con vértices  $x, y, z$ .

### Ejemplo 1.2

Consideremos el conjunto  $A = \{(1, 1), (2, 3), (3, 7)\}$  utilizando Matlab podemos generar su cápsula convexa dada en la Figura (2), siguiendo las siguientes instrucciones:

```

x=[1 2 3];
y=[1 3 7];
dt = DelaunayTri(x,y);
k = convexHull(dt);
plot(x,y, '.', 'markersize',10);
hold on;
plot(x(k), y(k), 'r');
hold off;

```

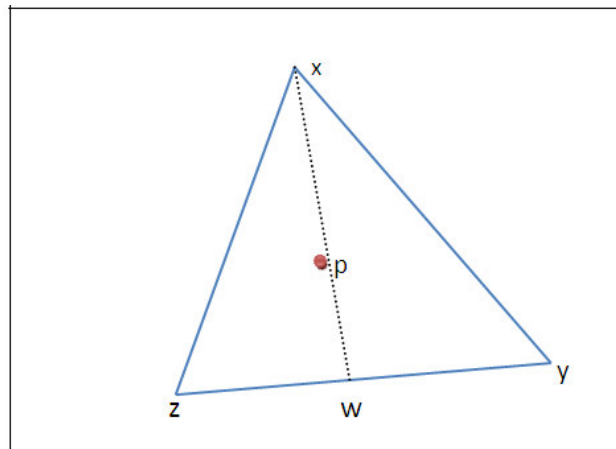


Figura 1: Placa triangular con vertices x,y,z

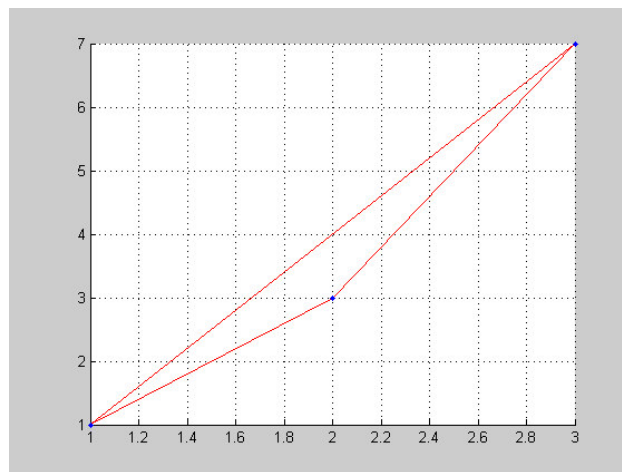


Figura 2: Cápsula convexa del conjunto A

### Ejemplo 1.3

Si consideramos ahora:  $B = \{(5, 4), (2, -3), (3, 7), (-2, 3), (6, 1)\}$  obtenemos que  $co(A)$  esta dada por el polígono dado en la Figura (3).

También podemos calcular la cápsula convexa y el volumen de esta para un subconjunto finito de puntos en  $\mathbb{R}^3$ , como muestra el siguiente ejemplo.

### Ejemplo 1.4

Sea  $A = \{(2, 4, 0), (1, 2, -3), (3, 3, 1), (-2, -1, 3), (2, 1, 1), (3, 5, 8)\}$  el código en Matlab para generar  $co(A)$  es:

```
X=[2 4 0;1 2 -3;3 3 1;-2 -1 3;2 1 1;3 5 8];
dt=DelaunayTri(X);[ch v]=convexHull(dt);
trisurf(ch, X(:,1),X(:,2),X(:,3), 'FaceColor', 'cyan')
```

Donde  $v$  nos indicara el volumen de  $co(A)$ , la cápsula convexa se muestra en la Figura (4).

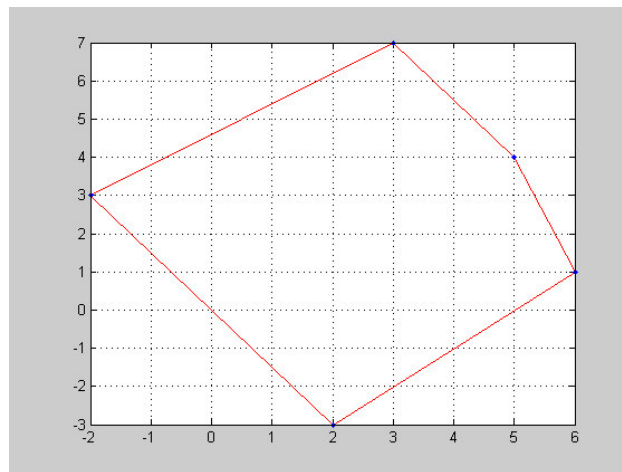


Figura 3: Cápsula convexa del conjunto B

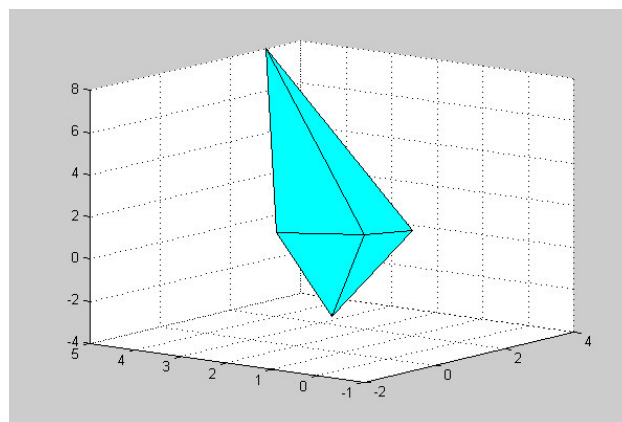


Figura 4:  $v=30.6667$

## Ejemplo 1.5

Consideremos ahora  $A = \text{Graf}(f)$ , la gráfica de la función  $f(x) = \sqrt{|x|}$  para  $-1 \leq x \leq 1$  algunos puntos de esta gráfica así como su cápsula convexa se muestran en la Figura (5).

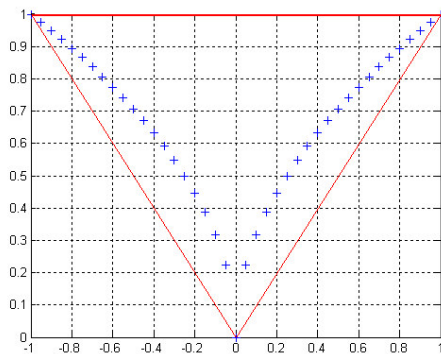


Figura 5: Cápsula convexa de la gráfica de la función  $f(x) = \sqrt{|x|}$

**Definición 1.4** Un conjunto  $C \subset \mathbb{R}^n$  se llama cono cuando

$$x \in C \Rightarrow tx \in C \quad \forall t > 0.$$

El conjunto  $C^* = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, x \rangle \leq 0, \forall x \in C\}$ , es llamado el cono polar de  $C$ .

En particular si  $C$  es convexo entonces  $C$  es un cono convexo.

Intuitivamente un cono es un conjunto de direcciones.

**Definición 1.5** Sea  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  convexo, una función  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  es llamada convexa si:

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y) \quad (1)$$

para cualesquiera  $x, y \in C$ ,  $\alpha \in [0, 1]$ .

Una función convexa  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  es llamada estrictamente convexa si la desigualdad en (1) es estricta, para  $x \neq y$  y  $\alpha \in (0, 1)$ .

Una función  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  es llamada cóncava si  $-f$  es convexa.

Una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es llamada positiva homogénea si  $f(lx) = lf(x)$  para todo  $l \geq 0$  y



es llamada subaditiva si  $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$  para cualesquiera  $x, y \in \mathbb{R}^n$ . Es inmediato ver que toda función positiva homogénea y subaditiva es convexa.

Sean  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\gamma \in \mathbb{R}$ , el conjunto  $L_f(\gamma) = \{x \in C : f(x) \leq \gamma\}$  es llamado conjunto de nivel  $\gamma$  de  $f$ .

Es inmediato ver que si  $f$  es convexa todos los conjuntos de nivel son convexos, es bueno observar que la convexidad de los conjuntos de nivel no implica la convexidad de la función  $f$ , para esto considere por ejemplo la función:  $f(x_1, x_2) = \sqrt{|x_1| + |x_2|}$  cuyos conjuntos de nivel son todos convexos, pero  $f$  no es una función convexa. La gráfica de esta función y algunos conjuntos de nivel se muestra en la Figura (6). En el último capítulo veremos una clase de funciones para la cual la recíproca es también válida.

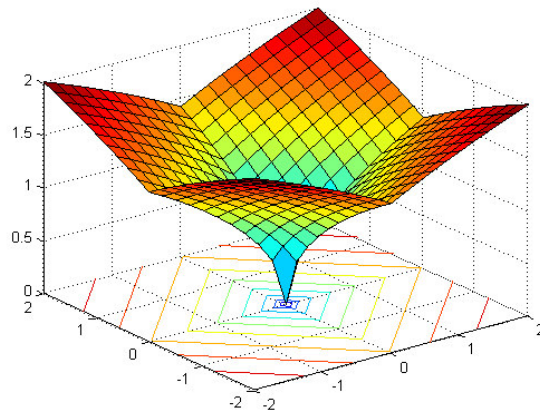


Figura 6: Función no convexa con todos los conjuntos de nivel convexos.

**Definición 1.6** El epigrafo de una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es el conjunto:

$$\text{epi}(f) = \{(x, r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : f(x) \leq r\}$$

El siguiente teorema establece la relación entre la convexidad de una función y su epigrafo.

**Teorema 1.4** Sea  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  un conjunto convexo. Una función  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  es convexa si, y solamente si su epigrafo es un conjunto convexo en  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ .

**Prueba.** Ver [3].

**Definición 1.7** Una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es localmente Lipschitziana en  $a \in \mathbb{R}^n$  con constante  $k(a) > 0$  si existe un  $r > 0$  tal que para cualesquiera  $x, y \in B(a, r)$  se tiene:

$$|f(x) - f(y)| \leq k \|x - y\|$$

**Teorema 1.5** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función convexa, entonces para toda  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $f$  es localmente Lipschitziana en  $x$ .

**Prueba.** Ver [2].

Se deduce inmediatamente que toda función convexa es continua.

**Definición 1.8** Si  $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}^n$ , definimos la distancia de  $y$  a  $X$  denotada por:  $d(X, y)$  como:

$$d(X, y) = \inf \{ \|y - x\|, x \in X \}$$

Un punto  $x^* \in X$  es llamado el punto más cercano de  $X$  a  $y$  si  $d(X, y) = \|y - x^*\|$ .

**Lema 1.1** Sea  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  un subconjunto convexo con  $y \notin C$ . Si existe un punto  $x^* \in C$  el punto más cercano de  $C$  a  $y$  entonces es único.

**Prueba**

Supongamos que existan dos puntos  $x_1, x_2 \in C$  ambos cumpliendo la definición 1.8 con respecto a  $y$  entonces como  $C$  es convexo  $\frac{x_1 + x_2}{2} \in C$ , luego tenemos

$$\begin{aligned} d(C, y) &\leq \left\| \frac{x_1 + x_2}{2} - y \right\| = \frac{1}{2} \|(x_1 - y) + (x_2 - y)\| \leq \frac{1}{2} \|x_1 - y\| + \frac{1}{2} \|x_2 - y\| \\ &= d(C, y) \end{aligned}$$

entonces la desigualdad triangular usada en la parte anterior se convierte en igualdad entonces existe un  $k \geq 0$  tal que  $(x_1 - y) = k(x_2 - y)$  supongamos que  $0 < k$  entonces como  $d(C, y) = \|x_1 - y\| = \|x_2 - y\|$  entonces  $k = 1$  entonces  $x_1 = x_2$ . Si  $k = 0$  entonces  $y \in C$  lo cual es absurdo.  $\square$

**Lema 1.2** Sea  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  un subconjunto cerrado con  $y \notin C$ . Entonces existe un  $x^* \in C$  punto más cercano de  $C$  a  $y$ .

**Prueba**

Sea  $x_0 \in C$  y sea  $r > \|x_0 - y\|$ . Sea  $C_1 = \bar{B}(y, r) \cap C$  entonces  $C_1$  es cerrado y acotado y por lo tanto compacto. La función  $x \rightarrow \|x - y\|$  es continua en  $C_1$  por lo tanto alcanza su

mínimo; esto es existe  $x^* \in C_1$  tal que para todo  $x \in C_1$  se tiene  $\|x - y\| \geq \|x^* - y\|$ . Ahora, si  $x \in C \setminus C_1$  entonces  $x \notin \bar{B}(y, r)$  y puesto que  $x_0 \in C_1$  se tiene:

$$\|x - y\| > r > \|x_0 - y\| \geq \|x^* - y\|$$

así  $\|x - y\| \geq \|x^* - y\|$  para toda  $x \in C$ .  $\square$

**Lema 1.3** *Sea  $C$  un conjunto convexo con  $y \notin C$ . Entonces  $x^* \in C$  es el punto más próximo a  $y$  si y solo si  $\langle y - x^*, x - x^* \rangle \leq 0$  para toda  $x \in C$ .*

### Prueba

Sea  $x^* \in C$  el punto más próximo a  $y$ . Como  $C$  es convexo para cada  $x \in C$  se tiene  $[x^*, x] = \{z(t) : z(t) = x^* + t(x - x^*), 0 \leq t \leq 1\} \subseteq C$ . Sea

$$\phi(t) = \|z(t) - y\|^2 = \langle x^* + t(x - x^*) - y, x^* + t(x - x^*) - y \rangle$$

para  $0 \leq t \leq 1$ . Si  $t = 0$  entonces  $z = x^*$  como  $\phi$  es continuamente diferenciable en  $[0, 1]$  y  $x^* \in C$  es el punto más próximo a  $y$  entonces  $\phi'(0+) \geq 0$  en efecto :

$$\phi'(0+) = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\phi(h) - \phi(0)}{h}$$

como  $\|z(h) - y\|^2 \geq \|x^* - y\|^2$  para  $0 \leq h \leq 1$  entonces  $\frac{\phi(h) - \phi(0)}{h} \geq 0$  de donde se sigue el resultado. Calculando  $\phi'(t)$  usando la regla de la cadena obtenemos

$$\phi'(t) = 2[-\langle y - x^*, x - x^* \rangle + t\|x^* - x\|^2]$$

tomando el límite cuando  $t \rightarrow 0$  y usando  $\phi'(0+) \geq 0$  tenemos que:

$$\langle y - x^*, x - x^* \rangle \leq 0 \text{ para toda } x \in C.$$

Ahora supongamos que  $\langle y - x^*, x - x^* \rangle \leq 0$  para toda  $x \in C$ . Sea  $x \in C$  con  $x \neq x^*$ , entonces repitiendo los pasos anteriores tenemos que

$$\phi'(t) = 2[-\langle y - x^*, x - x^* \rangle + t\|x^* - x\|^2]$$

de la hipótesis tenemos que  $\phi'(t) > 0$ , para  $0 < t \leq 1$  entonces  $\phi(t)$  es una función estrictamente creciente en  $[0, 1]$  y para todo  $z(t) \in [x^*, x]$  se tiene que:  $\|z(t) - y\| > \|x^* - y\|$  tomando  $t = 1$  tenemos  $\|x - y\| > \|x^* - y\|$  como  $x$  es arbitrario tenemos que  $\|x - y\| \geq \|x^* - y\|$  para toda  $x \in C$ .  $\square$

**Definición 1.9** *Sea  $C$  un conjunto convexo y cerrado de  $\mathbb{R}^n$ . Se define la función proyección euclidiana sobre  $C$ , denotada por:  $P_C : \mathbb{R}^n \rightarrow C$  dada por:*

$$P_C(y) = x \quad \text{donde} \quad \|y - x\| = d(C, y)$$

Esta función está bien definida por los lemas anteriores, nótese que si  $x \in C$  entonces  $P_C(x) = x$ .

**Teorema 1.6** *Sea  $C$  un conjunto convexo y cerrado de  $\mathbb{R}^n$  entonces para  $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$  se tiene que*

$$\|P_C(y_1) - P_C(y_2)\| \leq \|y_1 - y_2\|$$

### Prueba

Sean  $x_1 = P_C(y_1)$ ,  $x_2 = P_C(y_2)$  entonces por el Lema 1.3 tenemos que:

$$\langle y_1 - x_1, x - x_1 \rangle \leq 0; \quad \langle y_2 - x_2, x - x_2 \rangle \leq 0 \quad , \forall x \in C$$

en particular tomando  $x_1, x_2 \in C$  y reemplazando en estas desigualdades obtenemos:

$$\langle y_1 - x_1, x_2 - x_1 \rangle \leq 0; \quad \langle y_2 - x_2, x_1 - x_2 \rangle \leq 0$$

nótese que estas desigualdades son válidas aún cuando  $y_1, y_2 \in C$ . Tenemos que

$$\begin{aligned} \|y_1 - y_2\|^2 &= \|x_1 - x_2 + (y_1 - x_1 + x_2 - y_2)\|^2 = \|x_1 - x_2\|^2 + \|(y_1 - x_1 + x_2 - y_2)\|^2 + \\ &2 \langle x_1 - x_2, y_1 - x_1 + x_2 - y_2 \rangle \geq \|x_1 - x_2\|^2 + 2 \langle x_1 - x_2, y_1 - x_1 \rangle + 2 \langle x_1 - x_2, x_2 - y_2 \rangle \geq \\ &\|x_1 - x_2\|^2 \end{aligned}$$

esto completa la prueba.  $\square$

### Hiperplano

Si  $a \in \mathbb{R}^n$  es un vector no nulo y  $\alpha \in \mathbb{R}$ , llamamos hiperplano en  $\mathbb{R}^n$  al conjunto  $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a, x \rangle = \alpha\}$  que denotaremos por  $H_a^\alpha$ , es inmediato verificar que este conjunto es cerrado y convexo.

El semiespacio cerrado positivo asociado a  $H$  es  $H^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a, x \rangle \geq \alpha\}$ , el semiespacio cerrado negativo asociado a  $H$  es  $H^- = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a, x \rangle \leq \alpha\}$ , es inmediato verificar que ambos son convexos y cerrados.

### Teoremas de Separación

En esta sección desarrollamos y establecemos los teoremas de separación. En cierto sentido estos teoremas son los teoremas fundamentales de la teoría de optimización; sabemos que un hiperplano  $H_a^\alpha$  divide a  $\mathbb{R}^n$  en 2 semiespacios uno a cada lado del plano; de modo natural diremos que 2 conjuntos  $X, Y$  son separados por un hiperplano  $H_a^\alpha$  si ellos están contenidos en diferentes semiespacios determinados por  $H_a^\alpha$ .

Existen varios tipos de separación que definiremos a continuación.

**Definición 1.10** *Dos conjuntos  $X, Y$  son separados por un hiperplano  $H_a^\alpha$  si para todo  $x \in X$ ,  $\langle x, a \rangle \geq \alpha$  y para todo  $y \in Y$ ,  $\langle a, y \rangle \leq \alpha$ .*

Este tipo de separación no siempre corresponde a la idea intuitiva que tenemos sobre separación.

### Ejemplo 1.6

Consideremos en  $\mathbb{R}^2$  los conjuntos

$$X_1 = \{(x_1, x_2) : x_1 = 0, 0 \leq x_2 \leq 2\}$$

y

$$Y_1 = \{(x_1, x_2) : x_1 = 0, 1 \leq x_2 \leq 4\}$$

de la definición anterior ambos conjuntos están separados por el hiperplano  $x_1 = 0$ . Ver Figura (7).

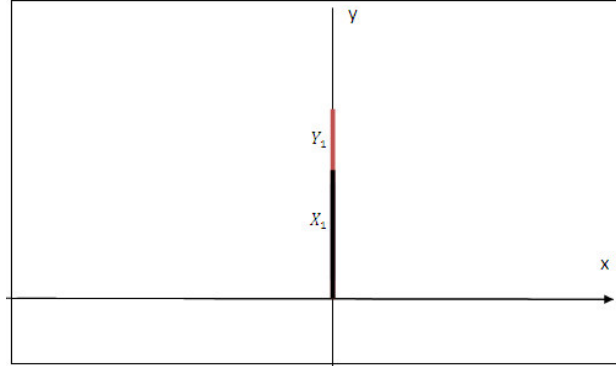


Figura 7: Los conjuntos  $X_1$  y  $Y_1$  están separados por el plano  $x_1 = 0$ .

**Definición 1.11** *Dos conjuntos  $X, Y$  son separados propiamente por un hiperplano  $H_a^\alpha$  si para todo  $x \in X$ ,  $\langle x, a \rangle \geq \alpha$  y para toda  $y \in Y$ ,  $\langle a, y \rangle \leq \alpha$  y al menos uno de los conjuntos no está contenido en  $H_a^\alpha$ .*

De la definición de separación propia se sigue que los conjuntos  $X_1, Y_1$  del ejemplo 1.6 no son propiamente separados.

Por otro lado la separación propia no exige que los conjuntos sean disjuntos como muestra el siguiente ejemplo.

### Ejemplo 1.7

Sean los conjuntos  $X_2 = \{(x_1, x_2) : -2 \leq x_1 \leq 0, 0 \leq x_2 \leq 1\}$  y

$Y_2 = \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq 2, 0 \leq x_2 \leq 4\}$  no son disjuntos pero están separados propiamente

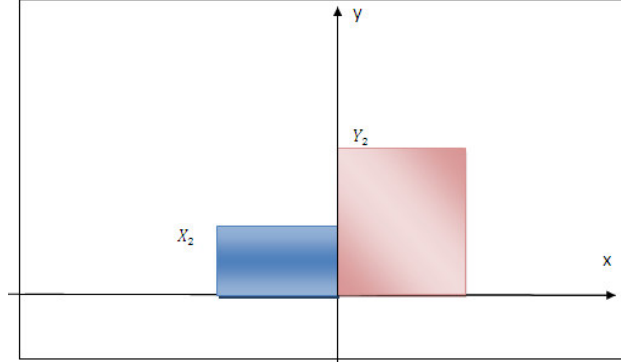


Figura 8: Los conjuntos  $X_2$  y  $Y_2$  están propiamente separados por el plano  $x_1 = 0$ .

por el hiperplano  $x_1 = 0$ . Ver Figura (8).

Más aún podría darse el caso de que un conjunto esté incluido en otro y sin embargo estén propiamente separados. Consideremos el siguiente ejemplo.

### Ejemplo 1.8

$X_3 = X_2$ ,  
 $Y_3 = \{(x_1, x_2) : x_1 = 0, 0 \leq x_2 \leq 1\}$  entonces se tiene que  $Y_3 \subseteq X_3$  y ambos conjuntos están separados propiamente por el plano  $x_1 = 0$ . Ver Figura (9).

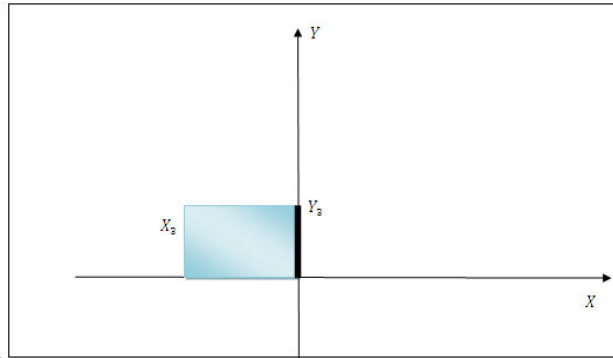


Figura 9: Los conjuntos  $X_3$  y  $Y_3$  están propiamente separados por el plano  $x_1 = 0$ .

Ahora introducimos la noción de separación estricta.

**Definición 1.12** Dos conjuntos  $X, Y$  son separados estrictamente por un hiperplano  $H_a^\alpha$  si para todo  $x \in X$ ,  $\langle x, a \rangle > \alpha$  y para toda  $y \in Y$ ,  $\langle a, y \rangle < \alpha$ .

Geométricamente la definición exige que ambos conjuntos se encuentren en los semiplanos abiertos opuestos determinados por  $H_a^\alpha$ .

**Definición 1.13** *Dos conjuntos  $X, Y$  son fuertemente separados por el hiperplano  $H_a^\alpha$  si existe  $\epsilon > 0$  tal que los conjuntos  $X + \epsilon B(0, 1)$ ,  $Y + \epsilon B(0, 1)$  son estrictamente separados por  $H_a^\alpha$ .*

**Lema 1.4** *Las siguientes aseveraciones son equivalente:*

1. *Los conjuntos  $X, Y$  son separados fuertemente por el hiperplano  $H_a^\alpha$ .*
2. *Existe  $\eta > 0$  tal que  $\langle a, x \rangle > \alpha + \eta$  para todo  $x \in X$  y  $\langle a, y \rangle < \alpha - \eta$  para toda  $y \in Y$ .*
3. *Existe  $\eta' > 0$  tal que*

$$\inf \{ \langle a, x \rangle : x \in X \} \geq \alpha + \eta'$$

$$\sup \{ \langle a, y \rangle : y \in Y \} \leq \alpha - \eta'$$

### Prueba

Es claro que (2)  $\Rightarrow$  (3), para ver que (3)  $\Rightarrow$  (2) tomese  $\eta = \frac{\eta'}{2}$ . Veamos que (1)  $\Leftrightarrow$  (2)  
Es claro que  $z \in B(0, 1)$  sí y solo sí  $-z \in B(0, 1)$ . Ahora supongamos que  $X$  y  $Y$  son fuertemente separados por  $H_a^\alpha$  entonces existe un  $\epsilon > 0$  tal que para todo  $x \in X$  y todo  $z \in B(0, 1)$  se tiene que:  $\langle a, x - \epsilon z \rangle > \alpha$ , entonces para cada  $x \in X$  y todo  $z \in B(0, 1)$  se tiene:

$$-\epsilon \langle a, z \rangle > \alpha - \langle a, x \rangle$$

tomando  $z = \frac{\theta a}{\|a\|}$  y haciendo  $\theta \rightarrow 1$  obtenemos:  $-\epsilon \|a\| \geq \alpha - \langle a, x \rangle$  equivalentemente

$$\langle a, x \rangle \geq \alpha + \epsilon \|a\|$$

para todo  $x \in X$ . De manera similar se obtiene que:

$$\langle a, y \rangle \leq \alpha - \epsilon \|a\|$$

para todo  $y \in Y$  entonces basta tomar  $\epsilon \|a\| > \eta > 0$ .

Para el recíproco supongamos que exista  $\eta > 0$  tal que  $\langle a, x \rangle > \alpha + \eta$  para todo  $x \in X$ . Sea  $\epsilon > 0$  y  $z \in B(0, 1)$ , como  $\|z\| < 1$  de la desigualdad de Cauchy- Schwartz se sigue que  $\langle a, z \rangle \leq \|a\|$  entonces se tiene que:

$\langle a, x - \epsilon z \rangle = \langle a, x \rangle - \epsilon \langle a, z \rangle > \alpha + \eta - \epsilon \|a\|$ . Similarmente para todo  $y \in Y$  y  $z \in B(0, 1)$  se

tiene que

$$\langle a, y + \epsilon z \rangle < \alpha - \eta + \epsilon \|a\|$$

entonces tomando  $\epsilon < \frac{\eta}{\|a\|}$  se tiene  $\langle a, u \rangle > \alpha$  para toda  $u \in X + \epsilon B(0, 1)$  y  $\langle a, v \rangle < \alpha$   $v \in Y + \epsilon B(0, 1)$  esto prueba el lema.  $\square$

### Observación 1.1

Es inmediato observar del lema anterior que una condición necesaria y suficiente para que dos conjuntos  $X, Y$  sean fuertemente separados es que exista un vector no nulo  $a$  tal que

$$\inf \{ \langle a, x \rangle : x \in X \} > \sup \{ \langle a, y \rangle : y \in Y \}$$

En efecto si

$$\inf \{ \langle a, x \rangle : x \in X \} = m > \sup \{ \langle a, y \rangle : y \in Y \} = n$$

tomemos  $\alpha = \frac{m+n}{2}$  y por ejemplo  $0 < \eta < \min \{ m - \alpha, \alpha - n \}$ .  $\square$

**Teorema 1.7** *Sea  $C$  un conjunto convexo y cerrado con  $y \notin C$  entonces existe un hiperplano  $H_a^\alpha$  que separa fuertemente  $y$  de  $C$ .*

### Prueba

La idea intuitiva de la demostración se basa en la Figura (10) donde se ve intuitivamente que  $C$  posee una recta tangente en cada punto frontera, así si  $x^*$  es el punto más cercano de  $C$  a  $y$ , el vector  $y - x^*$  es un vector normal a la tangente en  $x^*$ . Esta linea tangente posee ecuación  $\langle y - x^*, x - x^* \rangle = 0$  y separa propiamente  $y$  de  $C$ , para obtener la separación fuerte simplemente movemos esta tangente a un punto entre  $x^*$  e  $y$ , ahora justificaremos estos pasos con los Lemas: 1.2, 1.3 y 1.4.

Sea  $x^* \in C$  la mejor aproximación de  $C$  a  $y$ , sea  $a = y - x^*$ , entonces para toda  $x \in C$  por el Lema 1.3 tenemos que  $\langle a, x - x^* \rangle \leq 0$  entonces  $\langle a, x \rangle \leq \langle a, x^* \rangle$  y la igualdad ocurre cuando  $x = x^*$ , entonces se tiene que  $\sup \{ \langle a, x \rangle : x \in C \} = \langle a, x^* \rangle$  por otro lado  $\langle a, y - x^* \rangle = \|a\|^2$  luego

$$\langle a, y \rangle = \langle a, x^* \rangle + \|a\|^2 > \sup \{ \langle a, x \rangle : x \in C \}$$

la conclusión sigue de la Observación 1.1 tomando  $X = \{y\}$  y  $Y = C$ .  $\square$

**Teorema 1.8** *Sea  $C$  un conjunto convexo y sea  $y \notin C$  entonces existe un hiperplano  $H_a^\alpha$  tal que  $y \in H_a^\alpha$  y para toda  $x \in C$*

$$\langle a, x \rangle \leq \alpha$$

*Si  $\text{int}(C) \neq \emptyset$  entonces para toda  $x \in \text{int}(C)$  se tiene  $\langle a, x \rangle < \alpha$ .*



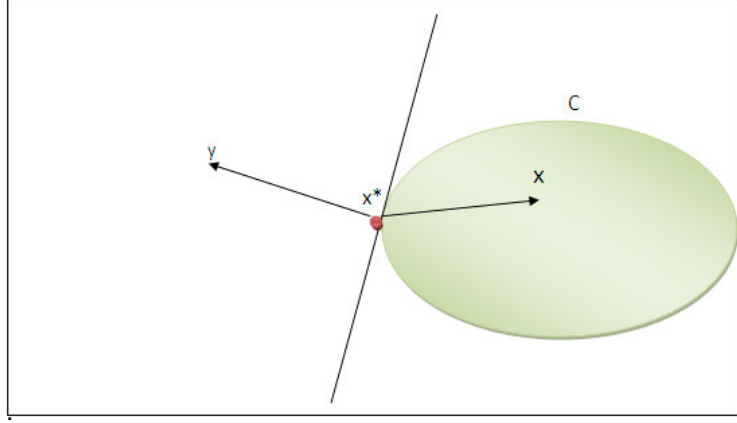


Figura 10: Separación por el plano tangente

### Prueba

Supongamos primero que  $y = 0$ , veamos que existe un  $a \neq 0$  tal que

$$\langle a, x \rangle \leq 0$$

para toda  $x \in C$ . Para toda  $x \in C$  definamos

$$N_x = \{z : \|z\| = 1, \langle z, x \rangle \leq 0\}$$

este conjunto es no vacío pues contiene al elemento  $-\frac{x}{\|x\|}$ . Será suficiente probar que:

$$\bigcap_{x \in C} N_x \neq \emptyset$$

claramente cada  $N_x$  es cerrado y está contenido en  $S(0, 1)$  luego

$$\bigcap_{x \in C} N_x = \bigcap_{x \in C} (N_x \cap S(0, 1))$$

como  $S(0, 1)$  es compacto, solo bastará probar que la familia  $\{N_x \cap S(0, 1)\}_{x \in C}$  posee la propiedad de intersección finita, para esto mostraremos a continuación que toda colección finita de conjuntos  $N_x$  es no vacía.

Consideremos una colección finita de conjuntos  $N_{x_1}, N_{x_2}, \dots, N_{x_m}$  con  $x_i \in C$ . Sea  $B = \text{co}\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  la cápsula convexa de  $x_i \in C$ ,  $i = 1, \dots, m$  además  $B$  es compacto y convexo y  $B \subseteq C$  como  $0 \notin C$  entonces  $0 \notin B$  entonces por el Teorema 1.7 existe un vector  $w \neq 0$  tal que:

$$\langle w, x \rangle \leq 0 \quad \text{para toda } x \in B$$

podemos asumir que  $\|w\| = 1$  caso contrario dividimos la última desigualdad entre  $\|w\|$  entonces de esta última desigualdad se tiene que:

$$w \in \left( \bigcap_{i=1}^m N_{x_i} \right) \cap S(0, 1)$$

como la colección es arbitraria entonces se tiene que

$$\bigcap_{x \in C} N_x \neq \emptyset$$

ahora si  $y \neq 0$  entonces:

$$y \notin C \Leftrightarrow 0 \notin C - y$$

como  $C - y$  es convexo, usamos los resultados anteriores y entonces existe un vector  $a \neq 0$  tal que

$$\langle a, x' \rangle \leq 0$$

para toda  $x' \in C - y$  equivalentemente se tiene que

$$\langle a, x - y \rangle \leq 0 \quad \text{para toda } x \in C$$

entonces

$$\langle a, x \rangle \leq \langle a, y \rangle \quad \text{para toda } x \in C$$

haciendo  $\langle a, y \rangle = \alpha$  se obtiene el resultado.  $\square$

**Teorema 1.9** Sean  $X, Y$  dos conjuntos convexos y disjuntos entonces existe un hiperplano  $H_a^\alpha$  que los separa.

**Prueba.** Ver [3].

**Teorema 1.10 (Teorema de separación estricta)** Sean  $C_1, C_2 \subseteq \mathbb{R}^n$  conjuntos cerrados, convexos y no vacíos. Supongamos que uno de ellos sea acotado (luego compacto). Entonces  $C_1 \cap C_2 = \emptyset$  si y solamente si existen  $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  y  $c \in \mathbb{R}$  tales que

$$\langle a, x \rangle < c < \langle a, y \rangle \quad \forall x \in C_1, \quad \forall y \in C_2.$$

**Prueba**

Si se tiene separación estricta y existiera un  $x \in C_1 \cap C_2$  entonces se tendría  $\langle a, x \rangle < c < \langle a, x \rangle$  lo cual es una contradicción.

Supongamos ahora que  $C_2$  sea limitado y  $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ . Definamos

$$\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+, \quad \varphi(x) = \text{dis}(x, C_1) = \|x - P_{C_1}(x)\|$$

Como  $\varphi$  es continua el problema

$$\min_{x \in C_2} \varphi(x)$$

tiene mínimo global (Teorema de Weierstrass) denotemos con  $x^*$  el punto óptimo y con  $\hat{y} = P_{C_1}(x^*)$  por el Lema 1.3 se tiene

$$\langle x^* - \hat{y}, x \rangle \leq \langle x^* - \hat{y}, \hat{y} \rangle = c_1 \quad \forall x \in C_1 \quad (2)$$

Para toda  $y \in C_2$  se tiene que

$$\|y - \hat{y}\| \geq \text{dist}(y, C_1) \geq \min_{y \in C_2} \varphi(y) = \varphi(x^*) = \text{dist}(x^*, C_1) = \|x^* - P_{C_1}(x^*)\| = \|x^* - \hat{y}\|$$

lo que significa que  $x^* = P_{C_2}(\hat{y})$ . Nuevamente usando el Lema 1.3 se tiene que:

$$\langle x^* - \hat{y}, y \rangle \geq \langle x^* - \hat{y}, x^* \rangle = c_2 \quad \forall y \in C_2 \quad (3)$$

Sea  $a = x^* - \hat{y} \neq 0$  ( $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ ) y  $c = \frac{c_1 + c_2}{2}$ . Observamos que  $c_1 < c < c_2$  por que  $c_2 - c_1 = \|x^* - \hat{y}\|^2 \geq 0$  luego el resultado sigue de (2) y (3).  $\square$

## Hiperplanos soportes

Un hiperplano  $H_a^\alpha$  es llamado un hiperplano soporte de un conjunto  $S$ , si para toda  $x \in S$  se tiene  $\langle a, x \rangle \leq \alpha$  y existe al menos un punto  $x_0 \in \bar{S} \cap H_a^\alpha$ , el hiperplano  $H_a^\alpha$  es llamado el soporte de  $S$  en  $x_0$ . El hiperplano soporte es llamado no trivial si existe al menos un  $x_1 \in S$  tal que  $\langle a, x_1 \rangle < \alpha$ .

La Figura (11) muestra algunos ejemplos de hiperplano soporte.

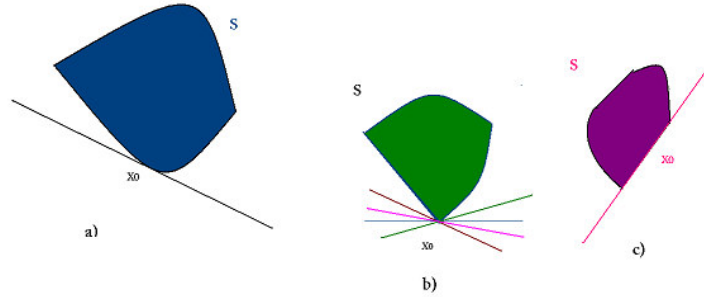


Figura 11: Unicidad del plano soporte en a), infinidad de planos soportes en b) y un mismo soporte para infinitos puntos en c)

**Teorema 1.11** Sea  $C$  un conjunto convexo y sea  $z$  un punto frontera de  $C$  entonces existe un hiperplano soporte  $H_a^\alpha$  a  $C$  tal que  $z \in H_a^\alpha$ . Si  $\text{int}(C) \neq \emptyset$  entonces el hiperplano soporte es no trivial.

## Prueba

Tenemos dos posibilidades si  $z \notin C$  y  $z \in C$ .

Si  $z \notin C$  entonces del Teorema 1.8 se sigue que existe un hiperplano  $H_a^\alpha$  tal que para toda  $x \in C$  se tiene que

$$\langle a, x \rangle \leq \alpha, \quad \langle a, z \rangle = \alpha$$

Si  $z \in C$  de la definición de punto frontera se sigue que existe una sucesión  $(y_k)$  con  $y_k \notin C$  tal que  $y_k \rightarrow z$  se sigue del Teorema 1.8 que para cada  $y_k \notin C$  existe un  $a_k \neq 0$  tal que para todo  $x \in C$  se tiene

$$\langle a_k, x \rangle \leq \langle a_k, y_k \rangle$$

podemos asumir que  $\|a_k\| = 1$  caso contrario dividimos esta última desigualdad entre  $\|a_k\|$ ; como  $S(0, 1)$  es compacto entonces existe una subsucesión de  $(a_k)$  que la representaremos de la misma manera que converge a  $a \in S(0, 1)$  tomando límite cuando  $k \rightarrow \infty$  en la última desigualdad tenemos para todo  $x \in C$  que

$$\langle a, x \rangle \leq \langle a, z \rangle$$

tomando  $\alpha = \langle a, z \rangle$  obtenemos el plano buscado.  $\square$

Una propiedad importante en optimización es el de sucesión Fejér convergente, que definiremos a continuación.

**Definición 1.14** Una sucesión  $(x_k)$  en  $\mathbb{R}^n$ , es llamada Fejér convergente en un conjunto  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ , si

$$\|x_{k+1} - x\| \leq \|x_k - x\| \quad \forall k \in \mathbb{Z}_0^+, \quad \forall x \in U$$

Como consecuencia de la definición anterior tenemos el siguiente resultado.

**Teorema 1.12** Sea  $(x_k)$  una sucesión Fejér convergente en un conjunto  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  entonces  $(x_k)$  es acotada. Si  $\hat{x} \in U$  es un punto de acumulación de  $(x_k)$  entonces  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \hat{x}$ .

### Prueba

Se sigue de la definición que  $\|x_k - x\| \leq \|x_0 - x\|$  para todo  $x \in U$  y para toda  $k = 0, 1, \dots$ , entonces  $(x_k)$  es acotada. Ahora sea  $(x_{k_j})$  una subsucesión de  $(x_k)$  tal que  $\lim_{j \rightarrow \infty} x_{k_j} = \hat{x}$ , tenemos que  $(\|x_k - \hat{x}\|)$  es una sucesión decreciente de números no negativos y posee una subsucesión  $(\|x_{k_j} - \hat{x}\|)$  que converge a 0 luego  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - \hat{x}\| = 0$  entonces  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \hat{x}$ .  $\square$

**Definición 1.15** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  decimos que  $f$  es diferenciable en  $x_0$  si existen las derivadas parciales  $\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i}$  para  $i = 1, 2, \dots, n$  y si además:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x) - f(x_0) - \nabla f(x_0)^T(x - x_0)|}{\|x - x_0\|} = 0.$$

**Definición 1.16** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Una dirección (vector)  $v \in \mathbb{R}^n$  es una dirección de descenso para  $f$  en  $\bar{x}$  si existe  $l > 0$  tal que  $f(\bar{x} + tv) < f(\bar{x})$  para toda  $t \in \langle 0, l \rangle$ .

**Teorema 1.13** Supongamos que  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una función diferenciable en  $\bar{x}$ , si existe un vector  $v \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\nabla f(\bar{x}) \cdot v < 0$  entonces  $v$  es una dirección de descenso para  $f$  en  $\bar{x}$ .

### Prueba

Como  $f$  es diferenciable en  $\bar{x}$  entonces  $f$  es continua en  $\bar{x}$ , además:

$$\nabla f(\bar{x}) \cdot v = f'(\bar{x}, v) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + tv) - f(\bar{x})}{t} < 0$$

la función  $g(t) = \frac{f(\bar{x} + tv) - f(\bar{x})}{t}$  es continua en  $t = 0$  con  $g(0) = f'(\bar{x}, v)$  entonces existe  $l > 0$  tal que para  $t \in \langle 0, l \rangle$  se tiene que  $\frac{f(\bar{x} + tv) - f(\bar{x})}{t} < 0$  como  $t > 0$  se sigue que

$$f(\bar{x} + tv) < f(\bar{x})$$

para toda  $t \in \langle 0, l \rangle$ .  $\square$

**Definición 1.17** Sea  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  un conjunto convexo;  $c \in C$  es un punto extremal de  $C$  si:

$$c = at + (1 - t)b \quad \text{con} \quad a, b \in C, t \in \langle 0, 1 \rangle \Rightarrow a = b = c$$

En otras palabras, un punto  $c$  en un conjunto convexo  $C$  es un punto extremo de  $C$ , si  $c \notin (a, b)$  para cualquier par de puntos distintos  $a$  y  $b$  de  $C$ . El conjunto de puntos extremos de  $C$  es denotado por  $C_e$ . Es fácil probar que si  $C$  tiene interior no vacío entonces  $C_e \subseteq \partial C$ .

**Definición 1.18**  $Q \subseteq \mathbb{R}^n$  es un poliedro convexo si es la intersección de una cantidad finita de semiespacios cerrados. Así la forma general de un poliedro convexo es :

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$$

Donde  $A$  y  $b$  son matrices en  $\mathbb{R}^{m \times n}$  y  $\mathbb{R}^{m \times 1}$  respectivamente.

**Definición 1.19**  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  es un politopo convexo si es la capsula convexa de un número finito de puntos. Así la forma general de un politopo convexo es :

$$P = \left\{ y = \sum_{i=1}^n \alpha_i s_i : \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, n \right\}$$

Los puntos  $s_i$  son llamados los vértices del politopo.

Es inmediato ver que  $P$  es compacto por ser la capsula convexa de un conjunto compacto.

**Definición 1.20** Dada una función  $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .  $f$  es semicontinua inferior (s.c.i) en  $x \in X$ , si para toda sucesión  $(x_k)$  en  $X$  convergente a  $x$  se tiene que:

$$\liminf_{k \rightarrow +\infty} f(x_k) \geq f(x)$$

donde

$$\liminf_{k \rightarrow +\infty} f(x_k) = \sup_{n \in \mathbb{Z}_0^+} \inf_{k \geq n} f(x_k).$$

Si  $f$  es semicontinua inferior para todo  $x \in X$ , entonces diremos que  $f$  es semicontinua inferior en  $X$ .

Análogamente decimos que  $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es semicontinua superior (s.c.s) en  $x \in X$ , si para toda sucesión  $(x_k)$  en  $X$  convergente a  $x$  se tiene que:

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} f(x_k) \leq f(x)$$

De las definiciones anteriores es inmediato verificar que  $f$  es continua en  $a \in X$  si y solo si  $f$  es s.c.s y s.c.i en  $a$ .

**Definición 1.21** Decimos que una sucesión  $(x_k)$  en  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  es crítica (con relación al conjunto  $X$ ) si:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|x_k\| = +\infty \quad \text{ó} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = x \in \bar{X} \setminus X$$

La función  $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es llamada coerciva en  $X$  si para toda sucesión crítica  $(x_k)$  se tiene:

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} f(x_k) = +\infty$$

donde

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} f(x_k) = \inf_{n \in \mathbb{Z}_0^+} \sup_{k \geq n} f(x_k).$$

## Caracterización de funciones convexas de clases $C^1$ y $C^2$

**Teorema 1.14** Sea  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto, convexo y no vacío y  $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^1$ . Se verifica:

- $f$  es convexa en  $X \Leftrightarrow \forall x, y \in X, f(x) - f(y) \geq \langle \nabla f(y), x - y \rangle$ .
- $f$  es estrictamente convexa en  $X \Leftrightarrow \forall x, y \in X, x \neq y, f(x) - f(y) > \langle \nabla f(y), x - y \rangle$ .

**Prueba.** Ver [4].

Un resultado completamente análogo se obtiene para funciones cóncavas.

### Observación 1.2

Dada una función  $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  donde  $X$  es un abierto no vacío y  $f$  es una función de clase  $C^2$ , denotaremos con  $\nabla^2 f(x_0)$  la matriz Hessiana de  $f$  en  $x_0$  y la identificaremos con la forma cuadrática que define sobre  $\mathbb{R}^n$ .

**Teorema 1.15** *Sea  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto, convexo y no vacío y  $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^2$ . Se verifica:*

- $f$  es convexa en  $X \Leftrightarrow \forall x \in X, \nabla^2 f(x)$  es definida positiva o semidefinida positiva.
- Si  $\forall x \in X, \nabla^2 f(x)$  es definida positiva  $\Rightarrow f$  es estrictamente convexa en  $X$ .

**Prueba.** Ver [4].

Un resultado completamente análogo se obtiene para funciones cóncavas.

### Observación 1.3

No es cierto el recíproco de la última parte del teorema anterior. Considere por ejemplo, la función  $f(x, y) = x^4 + y^4$  que es estrictamente convexa en  $\mathbb{R}^2$ ; sin embargo,  $\nabla^2 f(0, 0) = (0)$  es la matriz nula, que tiene asociada una forma cuadrática que no es definida positiva.

## 1.2. Problema General de Optimización

Antes de definir lo que es un problema de optimización es necesario introducir los conceptos de mínimo y máximo locales y globales de una función.

Estos puntos también son llamados óptimos locales y óptimos globales.

**Definición 1.22** (*Mínimo local y mínimo global*) Sea  $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Un punto  $\bar{x} \in X$  es llamado un punto de mínimo local de  $f$  sobre  $X$  si existe un  $\epsilon > 0$  tal que

$$f(\bar{x}) \leq f(x), \quad \forall x \in X \cap B(\bar{x}, \epsilon)$$

El punto  $\bar{x} \in X$  es llamado punto de mínimo global de  $f$  en  $X$  si:

$$f(\bar{x}) \leq f(x), \quad \forall x \in X$$

En el caso de que

$$f(\bar{x}) < f(x), \quad \forall x \in X \cap \hat{B}(\bar{x}, \epsilon)$$

diremos que  $\bar{x}$  es un mínimo local estricto. Análogamente para un mínimo global estricto.

Evidentemente todo mínimo global es un mínimo local, pero en general el recíproco no es cierto. Análogamente se definen los conceptos de máximo global, local y estricto.

Dada una función  $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , el problema general de optimización consiste en resolver el siguiente problema:

$$Opt_{x \in X} f(x)$$

que significa encontrar los puntos óptimos locales y globales de  $f$  sobre  $X$ ;  $f$  es llamada la función objetivo y  $X$  el conjunto factible.

Es fácil observar que hallar un punto de máximo local o global de una función  $f$  es equivalente al de hallar un punto de mínimo local o global de  $-f$  respectivamente, así todo problema de maximización puede ser transformado a uno de minimización. Luego sin pérdida de generalidad solo estudiaremos problemas de minimización de la forma:

$$\min_{x \in X} f(x)$$

El conjunto de puntos óptimos sera denotado por  $X^*$  i.e

$$X^* = \{x \in X : f(x) \leq f(y), \quad \forall y \in X\}$$



### 1.3. Resultados de Existencia de Soluciones Óptimas

Consideremos el problema:

$$P : \quad \min_{x \in X} f(x)$$

donde  $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una función definida sobre  $X$ . Una pregunta natural es saber si existe una solución óptima del problema planteado. Para esto es necesario imponer algunas condiciones para  $f$  y  $X$ .

Una condición necesaria para asegurar la existencia de un punto de mínimo global es que la función  $f$  sea acotada inferiormente sobre  $X$ , esto es,  $\inf \{f(x) : x \in X\} > -\infty$ , más esta condición no es suficiente, considere por ejemplo la función  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  donde  $x \in \mathbb{R}$ ; esta función es acotada inferiormente por cero, pero no existe un punto de mínimo global.

Un resultado clásico para garantizar la existencia de un mínimo y máximo global es el Teorema de Bolzano-Weirstrass, para funciones continuas sobre conjuntos compactos. El siguiente resultado asegura la existencia de un mínimo global para el problema  $P$  bajo la hipótesis de semicontinuidad inferior para la función  $f$ .

**Teorema 1.16** *Dada una función  $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Si  $f$  es s.c.i en un conjunto no vacío y compacto  $X$ , entonces existe un punto de mínimo global.*

#### Prueba

Probaremos inicialmente que  $f$  está acotada inferiormente. Supongamos por contradicción que esto no ocurra entonces existe una sucesión  $(x_k)$  en  $X$  tal que:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_k) = -\infty$$

Como  $(x_k)$  es acotada existe una subsucesión  $(x_{k_j})$  de  $(x_k)$  que converge a  $\bar{x} \in X$ , esto es  $\lim_{j \rightarrow +\infty} x_{k_j} = \bar{x}$ , de la semicontinuidad inferior de  $f$  se tiene:

$$f(\bar{x}) \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} f(x_{k_j}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_k) = -\infty$$

lo cual es absurdo; luego  $f$  es acotada inferiormente sobre  $X$ . Así existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que

$$\alpha = \inf \{f(x) : x \in X\}$$

de la definición de ínfimo existe una sucesión  $(z_k)$  en  $X$  tal que  $f(z_k) \rightarrow \alpha$ , por la compacidad de  $X$  existe una subsucesión  $(z_{k_j})$  de  $(z_k)$  tal que  $\lim_{j \rightarrow +\infty} z_{k_j} = \bar{z} \in X$ . Por la semicontinuidad de  $f$  se tiene que:

$$f(\bar{z}) \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} f(z_{k_j}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} f(z_k) = \alpha$$

entonces  $f(\bar{z}) = \alpha \leq f(x)$  para toda  $x \in X$ , luego existe un mínimo global  $\bar{z} \in X$ .  $\square$

**Colorario 1.1** *Dada una función  $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Si  $X$  es no vacío y compacto y  $f$  es continua en  $X$ , entonces existe un punto de mínimo global.*

**Prueba**

Es inmediato del teorema anterior.  $\square$

**Observación 1.4**

La condición de que el conjunto factible  $X$  sea compacto es muy fuerte para garantizar la existencia de un mínimo global. Considere por ejemplo  $\min_{x \in \mathbb{R}} |x|$ , aquí  $X = \mathbb{R}$  no es compacto pero el problema tiene un mínimo global.

El siguiente resultado exige solo la compacidad en un subconjunto de nivel de la función y no de todo su dominio.

**Colorario 1.2** *Dada una función  $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Si  $L_f(\alpha)$  es no vacío y compacto para algún  $\alpha \in \mathbb{R}$  y  $f$  es s.c.i en  $L_f(\alpha)$  entonces existe un punto de mínimo global de  $f$  en  $X$ .*

**Prueba**

Es inmediato del teorema anterior y del hecho que los conjuntos solución de los problemas  $\min_{x \in X} f(x)$  y  $\min_{x \in L_f(\alpha)} f(x)$  son iguales.  $\square$

**Colorario 1.3** *Dada una función  $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Si  $X$  es cerrado y  $L_f(\alpha)$  es no vacío y acotado para algún  $\alpha \in \mathbb{R}$  y  $f$  es s.c.i en  $cl(L_f(\alpha))$  entonces existe un punto de mínimo global de  $f$  en  $X$ .*

**Prueba**

El resultado se deduce del corolario anterior y del hecho que  $cl(L_f(\alpha)) = L_f(\alpha)$ .  $\square$

Cuando la función es coerciva podemos retirar la condición de compacidad sobre los conjuntos de nivel; tenemos el siguiente resultado.

**Colorario 1.4** *Dada una función  $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Si  $f$  es coerciva y semicontinua inferior en un conjunto no vacío  $X$ , entonces existe un punto de mínimo global de  $f$  en  $X$ .*

**Prueba.** Ver [5].

## 1.4. Optimización Diferenciable No Lineal

En esta sección introducimos brevemente los problemas de optimización diferenciables no lineales, presentaremos las condiciones de optimalidad, caracterización de las soluciones y los métodos más usados para su resolución.

Un problema de optimización es no lineal cuando la función objetivo y/o sus restricciones son funciones no lineales, presentaremos una breve exposición sobre optimización irrestricta, optimización con restricciones de igualdad, desigualdad y mixtas.

### 1.4.1. Optimización irrestricta

Un problema de minimización irrestricto en optimización no lineal es presentado de la siguiente forma:

$$PI : \begin{array}{l} \min f(x) \\ x \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

con  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable.

**Definición 1.23** Dada  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable en  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ .

- $\bar{x}$  es llamado punto crítico o estacionario si  $\nabla f(\bar{x}) = 0$ .
- $\bar{x}$  es llamado un punto silla de  $f$  si y sólo si es un punto crítico de  $f$  y no es un punto óptimo de  $f$ , es decir para toda  $r > 0$ , existen  $x_1, x_2 \in B(\bar{x}, r)$  tales que  $f(x_1) < f(\bar{x}) < f(x_2)$ .

**Teorema 1.17** (Condición necesaria de primer orden) Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable en  $\bar{x}$ . Si  $\bar{x}$  es un óptimo local entonces  $\nabla f(\bar{x}) = 0$ .

**Prueba.** Ver [5].

Los resultados siguientes tienen una versión completamente análoga para el caso de un problema de maximización irrestricta.

**Teorema 1.18** (*Condiciones necesarias de segundo orden*) Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ . Si  $\bar{x}$  es un mínimo local entonces:

- $\nabla f(\bar{x}) = 0$ .
- La matriz hessiana  $\nabla^2 f(\bar{x})$  es semidefinida positiva.

**Prueba.** Ver [5].

**Teorema 1.19** (*Condiciones suficiente de segundo orden*) Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in C^2$ . si  $\nabla f(\bar{x}) = 0$ ,  $\nabla^2 f(\bar{x}) > 0$  (definida positiva) entonces  $\bar{x}$  es un mínimo local estricto para  $f$  en  $\mathbb{R}^n$ .

**Prueba.** Ver [5].

### Observación 1.5

De los resultados anteriores se deduce que si  $\bar{x}$  es un punto crítico y  $\nabla^2 f(\bar{x})$  es indefinida, entonces  $\bar{x}$  es un punto silla de  $f$ .

### Ejemplo 1.9

Sea  $f(x, y) = 27x + \frac{1}{9}x^3 - 2y^2 + y^4$  y consideremos el problema:

$$\text{opt}_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x, y)$$

Para hallar los óptimos locales y globales usaremos las condiciones de primer y segundo orden. Usando la condición de primer orden, hallamos que los puntos críticos son  $(9, -1)$ ,  $(-9, 1)$ ,  $(9, 0)$  y  $(-9, 0)$ .

La matriz Hessiana de  $f$  es:

$\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}x & 0 \\ 0 & -4 + 12y^2 \end{pmatrix}$ , tenemos para los puntos críticos encontrados:

$\nabla^2 f(9, -1) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ , esta matriz es indefinida, luego  $(9, -1)$  es un punto silla.

$\nabla^2 f(-9, 1) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ , esta matriz es definida positiva, luego  $(-9, 1)$  es un punto de mínimo local estricto, que a su vez es el mínimo global.

$\nabla^2 f(9, 0) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ , esta matriz es definida negativa, luego  $(9, 0)$  es un punto de máximo local estricto, que a su vez es el máximo global.

$\nabla^2 f(-9, 0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ , esta matriz es indefinida, luego  $(-9, 0)$  es un punto silla.

#### 1.4.2. Optimización convexa

Un problema en optimización es un problema convexo (PC), si la función objetivo y el conjunto de restricciones son ambos convexos.

$$PC : \min_{x \in C} f(x)$$

Donde  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  es convexo y  $f$  es una función convexa definida en  $C$ .

Los teoremas siguientes son fácilmente adaptables para el caso de minimización y maximización de una función concava sobre un conjunto convexo.

La convexidad de la función garantiza que un minimizador local del problema  $PC$ , es un minimizador global, como puede ser visto en el teorema siguiente.

**Teorema 1.20** *Sea  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  una función convexa y  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  convexo. Entonces todo minimizador local de problema  $PC$ , en caso exista, es un minimizador global. Además el conjunto de minimizadores  $C^*$  es convexo. Si  $f$  es estrictamente convexa, un minimizador, caso exista, es único.*

**Prueba.** Ver [4]

### Observación 1.6

El teorema anterior no afirma la existencia de un mínimo, solo asegura su globalidad una vez supuesto su carácter local.

**Teorema 1.21** *Sea  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  una función convexa de clase  $C^1$  sobre  $C$  conjunto convexo. Si  $\langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle \geq 0$  para todo  $x \in C$  entonces  $f$  posee un mínimo global en  $x_0 \in C$ .*

**Prueba.** Ver [4].

**Teorema 1.22** *Sea  $f : C \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función convexa de clase  $C^1$  sobre  $C$  conjunto convexo y abierto. Si  $x_0 \in C$  tal que  $\nabla f(x_0) = 0$  entonces  $x_0$  es un mínimo global de  $f$  en  $C$ . Si  $f$  es estrictamente convexa,  $x_0$  es el único mínimo global estricto de  $f$  en  $C$ .*

**Prueba.**

Se deduce de inmediato de los teoremas anteriores.  $\square$

### Ejemplo 1.10

Sea  $f$  definida por  $f(x_1, x_2) = 3(x_1 - 2)^2 + (x_2 + 3)^2$ , se tiene que  $\nabla f(2, -3) = 0$  y  $Hf(2, -3) \succeq 0$  luego  $(2, -3)$  es el punto de mínimo local como  $f$  es convexa se tiene que es un mínimo global.

**Teorema 1.23** *Sea  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  una función convexa en un conjunto convexo  $C \subseteq \mathbb{R}^n$ . Si  $x_0 \in \text{int}(C)$  es un máximo global de  $f$  en  $C$ , entonces  $f$  es constante.*

**Prueba.** Ver [4].

**Colorario 1.5** *Sean  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  convexo y no vacío,  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  no constante y  $x_0 \in C$ . Si  $f$  es convexa y  $x_0$  es un máximo global de  $f$  en  $C$ , entonces  $x_0$  se encuentra en la frontera de  $C$ .*

**Prueba**

Es inmediato del teorema anterior.

**Teorema 1.24** Sean  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  convexo, no vacío y compacto,  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Si  $f$  es convexa, entonces  $C^*$  es compacto no vacío y contiene al menos un punto extremal de  $C$ .

**Prueba.** Ver [6].

**Teorema 1.25** Sean  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  un poliedro convexo no vacío,  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  convexa sobre  $C$ , si existe un valor máximo sobre  $C$  entonces este se alcanza en algún vértice de  $C$ .

**Prueba.** Ver [6].

### 1.4.3. Optimización con restricciones

Sea  $f : X \subseteq \mathbb{R}^n$  una función de clase  $C^1$  sobre  $X$  y consideremos el problema con restricciones:

$$PR : \min_{x \in X} f(x)$$

Si  $X$  es convexo tenemos el siguiente resultado:

**Teorema 1.26** Sea  $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $C^1$  sobre  $X$  conjunto convexo; si  $x_0 \in X$  es un mínimo local sobre  $X$  entonces  $\langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle \geq 0$  para todo  $x \in X$ .

**Prueba.** Ver [6].

Para el caso en la cual  $X$  es no convexo la conclusión del teorema anterior motiva a obtener un resultado similar como  $\langle \nabla f(x_0), y \rangle \geq 0$  para toda dirección  $y$  tal que  $x_0 + \alpha y \in X$  para todo  $\alpha > 0$  suficientemente pequeño. Direcciones que tienen esta propiedad u otras propiedades relacionadas constituyen conos que pueden ser vistos como aproximaciones a las restricciones del conjunto factible, localmente próximos al punto de interés.

**Definición 1.24** Un vector  $d \in \mathbb{R}^n$  es una dirección factible en  $x \in X$  si existe un  $\bar{\alpha} > 0$  tal que  $x + \alpha d \in X$ , para toda  $\alpha \in [0, \bar{\alpha}]$ . El conjunto de todas las direcciones factibles de  $X$  en  $x$  es denotada por  $F_X(x)$ .

### Observación 1.7

Claramente  $F_X(x)$  es un cono que contiene al origen. Si  $X$  es convexo puede comprobarse que  $F_X(x)$  consiste de todos los vectores de la forma  $\alpha(z - x)$  con  $\alpha > 0$  y  $z \in X$ . Cuando  $X$  es no convexo,  $F_X(x)$  puede no proporcionar información útil de la estructura local de conjunto  $X$  próximo al punto  $x$ . Por ejemplo a menudo no existe una dirección factible no nula en  $x$  cuando  $X$  es no convexo, por ejemplo en un punto de una circunferencia en el plano, en general en un conjunto de la forma  $\{x \in \mathbb{R}^n : h(x) = 0\}$  donde  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una función no lineal. La siguiente definición introduce un cono que provee información de la estructura de  $X$  ahun cuando no hay direcciones factibles mas que la nula.

**Definición 1.25** Sea  $x \in X \subseteq \mathbb{R}^n$ . Se define el cono tangente  $T(x, X)$  (en el sentido de Bouligand) en  $x \in X$  como sigue:

$$T(x, X) = \{d \in \mathbb{R}^n : \exists (d_k) \subseteq \mathbb{R}^n, d_k \rightarrow d, \exists (l_k) \subseteq \mathbb{R}^+, l_k \rightarrow 0, \text{ tal que } x + l_k d_k \in X, \forall k\}$$

los elementos de  $T(x, X)$  son llamados vectores tangentes de  $X$  en  $x$ .

Es fácil comprobar que el cono tangente es en efecto un cono y contiene al origen. Si  $x \in \text{int}(X)$  entonces  $T(x, X) = \mathbb{R}^n$ .

**Teorema 1.27** Sea  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  y  $x \in X$  entonces

- $T(x, X)$  es un cono cerrado.
- $\text{cl}(F_X(x)) \subseteq T(x, X)$ .
- Si  $X$  es convexo, entonces  $F_X(x)$  y  $T(x, X)$  son convexos y  $\text{cl}(F_X(x)) = T(x, X)$ .

**Prueba.** Ver [1].

### Ejemplo 1.11

En  $\mathbb{R}^2$  consideremos  $X = \{y \in B(0, 1) : y_2 > 0\} \cup \{(0, 0)\}$ , para  $x = (0, 0)$  se tiene que  $F_X(x) = \{y \in \mathbb{R}^2 : y_2 > 0\}$ . Si  $d = (a, 0)$  con  $a \in \mathbb{R}$  entonces tomamos  $d_k = (a, \frac{1}{k})$  y  $l_k = \frac{1}{k}$  es inmediato ver que  $x + l_k d_k \in X$  para todo  $k = 1, \dots$  luego  $T(x, X) = \{y \in \mathbb{R}^2 : y_2 \geq 0\}$ .



**Teorema 1.28** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $C^1$  en una vecindad de  $x_0 \in X \subseteq \mathbb{R}^n$  entonces:

1. Si  $f$  tiene un mínimo local en  $x_0$  sobre  $X$ , entonces  $\langle \nabla f(x_0), d \rangle \geq 0$  para todo  $d \in T(x_0, X)$ .  
Si  $X$  es convexo la condición anterior es equivalente a  $\langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle \geq 0$  para todo  $x \in X$ .  
Y en el caso en que  $X = \mathbb{R}^n$  la condición se reduce a  $\nabla f(x_0) = 0$ .
2. Si  $X$  es un conjunto convexo y  $f$  es convexa sobre  $X$  si  $\langle \nabla f(x), d \rangle \geq 0$  para todo  $d \in T(x, X)$ , entonces  $f$  tiene un mínimo global en  $x$  sobre  $X$ .

**Prueba.** Ver [6].

#### 1.4.4. Expresión de un cono tangente

Sunpongamos ahora que  $X$  es de la forma:

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, p; h_j(x) = 0, j = 1, \dots, q\}$$

Sea  $a \in X$  donde las funciones  $g_i$  y  $h_j$  son  $C^1$  en una vecindad de  $a$ .

**Definición 1.26** Una restricción de desigualdad  $g_i(x) \leq 0$  se dice activa en  $a \in X$  si  $g_i(a) = 0$ , e inactiva en  $a$  si  $g_i(a) < 0$ .

Denotaremos el conjunto de índices de las restricciones de desigualdad activas en  $a$  por :

$$I(a) = \{i : i = 1, \dots, p; g_i(a) = 0\}$$

Sea  $\tilde{X} = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \leq 0, i \in I(a); h_j(x) = 0, j = 1, \dots, q\}$

Es inmediato observar que  $X \subseteq \tilde{X}$ , de la continuidad de las funciones  $g_i$  se tiene que  $T(a, X) = T(a, \tilde{X})$ ; así el cono tangente no depende de las restricciones activas.

Se define el cono tangente linealizado como

$$L(a, X) = \{d \in \mathbb{R}^n : \langle \nabla g_i(a), d \rangle \leq 0, \forall i \in I(a), \quad \langle \nabla h_j(a), d \rangle = 0 \quad \forall j\}$$

En [6] se muestra que  $T(a, X) \subseteq L(a, X)$  y que en general  $T(a, X) \neq L(a, X)$ . La condición  $T(a, X) = L(a, X)$  es llamada: condición de calificación de restricciones. Mostraremos 3 casos donde esta condición es satisfecha.

**$X$  es un poliedro convexo.**

En este caso las funciones que definen las restricciones pueden escribirse como:  $g_i(x) = g_i(a) + \langle \nabla g_i(a), x - a \rangle$  y  $h_j(x) = h_j(a) + \langle \nabla h_j(a), x - a \rangle$  para  $i = 1, \dots, p$  y  $j = 1, \dots, q$ .

De donde se tiene que:

$$\tilde{X} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle \nabla g_i(a), x - a \rangle \leq 0, i \in I(a), \quad \langle \nabla h_j(a), x - a \rangle = 0, \quad j = 1, \dots, q\}$$

Es claro que si  $d \in L(a, X)$  entonces  $a + td \in \tilde{X}$  para todo  $t > 0$  de donde se deduce que  $L(a, X) = T(a, \tilde{X}) = T(a, X)$ .

### Condición de Slater.

Diremos que la condición de calificación de restricciones de Slater se satisface si:

1. Las funciones  $g_i$  son convexas y las funciones  $h_j$  son afines.
2. Existe  $b$  tal que  $g_i(b) < 0$  y  $h_j(b) = 0$  para  $i = 1, \dots, p$  y  $j = 1, \dots, q$ .

**Teorema 1.29** *Si la condición de Slater se verifica, entonces  $L(a, X) = T(a, X)$  para todo  $a \in X$ .*

**Prueba.** Ver [6].

### Condición de Mangasarian-Fromowitz.

Diremos que la condición de calificación de restricciones de Mangasarian-Fromowitz en  $a \in X$  es satisfecha si:

1. Los  $q$  vectores  $\nabla h_j(a)$  son linealmente independientes
2. Existe  $\tilde{d}$  tal que  $\langle \nabla h_j(a), \tilde{d} \rangle = 0$  para todo  $j = 1, \dots, q$  y  $\langle \nabla g_i(a), \tilde{d} \rangle < 0$  para todo  $i \in I(a)$

El siguiente resultado usa el teorema de la función implícita.

**Teorema 1.30** *Si la condición de Mangasarian-Fromowitz se verifica en  $a \in X$ , entonces  $L(a, X) = T(a, X)$ .*

**Prueba.** Ver [6].

#### 1.4.5. Condiciones de optimalidad de Karush-Kuhn-Tucker-Lagrange

Si  $a$  es un mínimo local de  $f$  en  $X$  entonces por el Teorema 1.28 se tiene que si  $d \in T(a, X)$  entonces  $\langle \nabla f(a), d \rangle \geq 0$ . En el caso en que la condición  $L(a, X) = T(a, X)$  es verificada entonces la conclusión de este resultado puede escribirse como:

$$\text{Si } d \text{ verifica } \langle \nabla g_i(a), d \rangle \leq 0, \forall i \in I(a); \langle \nabla h_j(a), d \rangle = 0, \forall j \Rightarrow \langle \nabla f(a), d \rangle \geq 0$$

El siguiente resultado permite reescribir la condición anterior.

**Teorema 1.31** (*Lema de Farkas*) Sea  $A$  una matriz de orden  $m \times n$  y  $B$  una matriz de orden  $q \times n$  y  $c, d \in \mathbb{R}^n$ . Las siguientes condiciones son equivalentes:

1.  $Ad \leq 0$  y  $Bd = 0 \Rightarrow \langle c, d \rangle \geq 0$
2.  $\exists u \in \mathbb{R}^m, \exists v \in \mathbb{R}^q$  tales que  $u \geq 0$  y  $c + A^t u + B^t v = 0$

**Prueba.** Ver [6].

**Teorema 1.32** (*Teorema de Karush-Kuhn-Tucker*) Supongamos que las funciones  $f, g_i$  y  $h_j$  son  $C^1$  en una vecindad de  $a$  y que se verifica  $L(a, X) = T(a, X)$ . Si  $a$  es un mínimo local de  $f$  en  $X$  entonces existen  $\bar{u} \in \mathbb{R}^p, \bar{v} \in \mathbb{R}^q$  tales que

$$\begin{aligned} \nabla f(a) + \sum_{i=1}^p \bar{u}_i \nabla g_i(a) + \sum_{j=1}^q \bar{v}_j \nabla h_j(a) &= 0, \\ \bar{u}_i &\geq 0, \quad g_i(a) \leq 0, \quad \bar{u}_i g_i(a) = 0 \quad \forall i \quad \text{y} \quad h_j(a) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, q \end{aligned}$$

**Prueba.** Ver [6].

Los  $\bar{u}_i, \bar{v}_j$  son llamados: multiplicadores de Karush-Kuhn-Tucker-Lagrange. Para el caso convexo, la condición anterior es también suficiente.

**Teorema 1.33** *Supongamos que las funciones  $f$ ,  $g_i$  y  $h_j$  son  $C^1$  en una vecindad de  $a$  y convexas y que las funciones  $h_i$  son afines. Si existen  $\bar{u} \in \mathbb{R}^p$ ,  $\bar{v} \in \mathbb{R}^q$  tales que*

$$\nabla f(a) + \sum_{i=1}^p \bar{u}_i \nabla g_i(a) + \sum_{j=1}^q \bar{v}_j \nabla h_j(a) = 0,$$

$$\bar{u}_i \geq 0, \quad g_i(a) \leq 0, \quad \bar{u}_i g_i(a) = 0 \quad \forall i \quad \text{y} \quad h_j(a) = 0 \quad \forall \quad j = 1, \dots, q$$

entonces  $f$  tiene un mínimo global en  $a \in X$ .

**Prueba.** Ver [6].

### Lagrangiano

Asociado al problema de optimización

$$PR : \min_{x \in X} f(x)$$

para  $X = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, p; h_j(x) = 0, j = 1, \dots, q\}$  se define la función  $l : \mathbb{R}^n \times [0, \infty)^p \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}$  dada por:

$$l(x, u, v) = f(x) + \sum_{i=1}^p u_i g_i(x) + \sum_{j=1}^q v_j h_j(x)$$

La función  $l$  es llamada el Lagrangiano asociado al problema  $PR$ . El Teorema 1.32 se puede reescribir en términos del Lagrangiano, como sigue.

**Teorema 1.34** *Supongamos que las funciones  $f$ ,  $g_i$  y  $h_j$  son  $C^1$  en una vecindad de  $a$  y que  $L(a, X) = T(a, X)$ . Si  $f$  tiene un mínimo local en  $a \in X$  entonces existen  $\bar{u} \in \mathbb{R}^p$ ,  $\bar{v} \in \mathbb{R}^q$  tales que:*

$$\begin{aligned} \nabla_x l(a, \bar{u}, \bar{v}) &= 0, \quad \nabla_u l(a, \bar{u}, \bar{v}) \leq 0, \quad \nabla_v l(a, \bar{u}, \bar{v}) = 0 \\ \bar{u} &\geq 0 \quad \text{y} \quad \langle \bar{u}, \nabla_u l(a, \bar{u}, \bar{v}) \rangle = 0 \end{aligned}$$

**Prueba.**

La prueba resulta del Teorema 1.32 y de la definición del Lagrangiano.  $\square$

## 1.5. Métodos Usuales Para Problemas de Optimización

En esta sección daremos una breve descripción de algunos métodos que son generalmente usados para poder resolver problemas de optimización diferenciable y no diferenciable.

Los métodos usuales para poder resolver problemas diferenciables no lineales irrestrictos son el método de Newton y el método del gradiente, para mas detalles ver [7].

### 1.5.1. Métodos para problemas diferenciables

#### Método de descenso

La idea principal de este método es la siguiente: dado  $x_k \in \mathbb{R}^n$ , buscar  $x_{k+1}$  tal que  $f(x_{k+1}) < f(x_k)$ . Una manera de realizar esto es tomar una dirección  $d_k$  a partir de  $x_k$  en la que sepamos que  $f$  desciende y moverse un cierto paso  $l_k$  en esa dirección para obtener  $x_{k+1}$  de la forma  $x_{k+1} = x_k + l_k d_k$  de modo que  $f(x_{k+1}) < f(x_k)$ . Los métodos que realizan este procedimiento sucesivamente se denominan: métodos de descenso.

En el caso particular de elegir  $d_k = -\nabla f(x_k)$  la dirección es llamada de máximo descenso o dirección de Cauchy. Esta dirección tiene la desventaja de que, cuando las curvas de nivel de la función objetivo son muy alargadas o por la elección de un determinado punto inicial, la dirección es casi ortogonal a la dirección que hace llegar al minimizador, generando así un proceso de zig-zag.

#### Algoritmo general

Dado  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  punto inicial, en cada caso paso  $k = 0, 1, \dots$  hacer:

- 1) Definir una dirección  $d_k$  descenso para  $f$  en  $x_k$ .
- 2) Encontrar  $l_k > 0$  (tamaño de paso) tal que  $f(x_k + l_k d_k) < f(x_k)$ .
- 3) Definir  $x_{k+1} = x_k + l_k d_k$ .
- 4) Determinar si  $x_{k+1}$  es solución

Como las direcciones  $d_k$  son de descenso, siempre es posible encontrar una sucesión de pasos ( $l_k$ ) cumpliendo el paso 2 del algoritmo. En estas condiciones la sucesión de valores  $f(x_k)$  forma una sucesión decreciente, lo que implica que para cada  $k$  los puntos  $x_k$  se encuentran en curvas de nivel asociadas a valores cada vez mas pequeños. Esto en instancia justifica la esperanza de que la sucesión ( $x_k$ ) pueda converger a una solución óptima (aunque en general, solo podemos garantizar convergencia a puntos críticos).

El criterio de finalización para determinar si un punto  $x_k$  puede tomarse como un valor próximo a la solución (o candidato a la solución) es  $\|\nabla f(x_k)\| \leq \epsilon$  para algún  $\epsilon > 0$  fijo, al inicio del algoritmo.

Si  $d_k$  es una dirección de descenso de  $f$  en  $x_k$ , existen diferentes formas de determinar  $l_k$ , estas reglas se denominan reglas de búsqueda lineal.

#### Búsqueda lineal exacta.

Esta estrategia consiste en buscar el minimizador de  $f$  sobre la semirecta  $\{x_k + t d_k, t \geq 0\}$ , sea  $\phi(t) = f(x_k + t d_k)$  entonces el paso  $l_k$  se obtiene como la solución del siguiente problema:

$$\min_{t \geq 0} \phi(t)$$

En la dirección  $d_k$  se cumple que  $\phi'(l_k) = \langle \nabla f(x_{k+1}), d_k \rangle = 0$ . Si  $\nabla f(x_{k+1}) \neq 0$  entonces  $x_{k+1}$  es el punto de intersección de la semirecta que parte de  $x_k$  en la dirección  $d_k$  con la curva de nivel de  $f$  que pasa por  $x_{k+1}$ . En la práctica buscar el valor exacto  $l_k$  puede tornarse difícil de calcular. Para el caso de que  $f$  es una función cuadrática se puede obtener una fórmula para el valor exacto de  $l_k$ .

### Regla de Armijo

Esta búsqueda es inexacta y se basa en calcular una longitud de paso que de un "descenso suficiente" de  $f$  en relación al valor  $f(x_k)$ . Para  $d_k, x_k$  y  $\sigma_1 \in \langle 0, 1 \rangle$  fijos, consideremos los valores de  $t$  que satisfacen la desigualdad:

$$\phi(t) \leq \phi(0) + \sigma_1 t \phi'(0)$$

En terminos de  $f$  se tiene la denominada condición de Armijo

$$f(x_k + td_k) \leq f(x_k) + \sigma_1 t \langle \nabla f(x_k), d_k \rangle$$

Como  $d_k$  es una dirección de descenso claramente el cumplimiento de estas condición implica que  $f(x_{k+1}) < f(x_k)$ .

En general en un proceso algoritmico se procede de la siguiente manera:

1. Comenzar con  $t = 1$ .
2. Si  $f(x_k + td_k) \leq f(x_k) + \sigma_1 t \langle \nabla f(x_k), d_k \rangle$  entonces definir  $l_k = t$ ; caso contrario reducir  $t$  con algún criterio hasta que se cumpla esta condición.

Posibles maneras de reducir  $t$ :

1. Hacer  $t = \frac{t}{2}$
2. Calcular  $t \in [0, 1t; 0, 9t]$

### Regla de Wolfe

Esta condición, además de pedir la condición de Armijo, exige otra condición para evitar valores de  $l_k$  muy pequeños, es decir, garantiza mayor desplazamiento, la posibilidad de dar pasos más largos.

Se pide que el valor de  $t$  deseado cumpla además la condición  $\phi'(t) \geq \sigma_2 \phi'(0)$ . En terminos de  $f$  esta condición es equivalente a:

$$\langle \nabla f(x_k + td_k), d_k \rangle \geq \sigma_2 \langle \nabla f(x_k), d_k \rangle$$

Es decir, la pendiente de la recta tangente en  $t$  debe ser mayor o igual a una proporción de la pendiente a  $\phi(t)$  en  $t = 0$ . En general se consideran valores  $0 < \sigma_1 < \sigma_2 < 1$  con  $\sigma_1 < \frac{1}{2}$ .

Tanto la regla de Armijo y la de Wolfe tienen una interpretación geométrica sencilla, además se prueba que siempre existe un valor  $l_k > 0$  que verifica cada una de estas condiciones; al respecto ver [7].

En lo que respecta a la convergencia del método de descenso con búsqueda lineal de Armijo o Wolfe solo se garantiza la convergencia a un punto crítico; ver [7].

### Algoritmo del gradiente óptimo con búsqueda lineal exacta

En este algoritmo, también llamado de descenso máximo, se sigue la dirección opuesta al gradiente y el tamaño de paso es determinado en cada iteración.

**Algoritmo**

Sea  $x_k \in \mathbb{R}^n$ ,  $\epsilon > 0$  tal que  $\nabla f(x_k) \neq 0$

**Paso 1** Calculamos  $d_k = -\nabla f(x_k)$ .

**Paso 2** (búsqueda lineal exacta) Hallamos  $l_k$  de modo que  $l_k$  resuelve el siguiente problema:  

$$\min_{l \geq 0} f(x_k - ld_k)$$

**Paso 3** Hacer  $x_{k+1} = x_k - l_k d_k$  y  $k = k + 1$

Criterio de parada  $\|\nabla f(x_k)\| < \epsilon$ .

Para resultados de convergencia y de variantes en la elección de los pasos  $l_k$ , del método del gradiente ver [8].

El algoritmo es globalmente convergente, es decir dado cualquier punto inicial  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  el método converge a un mínimo local. Con la finalidad de mejorar este método fueron elaborados otros métodos basados en los métodos gradientes, dentro de estos destaca el método de gradientes conjugados, para mas información de este método ver [9].

**Ejemplo 1.12**

Consideremos el siguiente problema de optimización:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} (2x_1^2 + 3x_2^2)$$

y tomemos como punto inicial  $x_0 = (\frac{7}{3}, 1)$ , tenemos que  $\nabla f(x) = (4x_1, 6x_2)$  entonces  $\nabla f(\frac{7}{3}, 1) = (\frac{28}{3}, 6)$ ,  $f(\frac{7}{3}, 1) = 13,8889$ , ahora hallamos el punto  $x_1$ , hallando  $l_0$  para ello resolvemos:

$$\min_{l \in \mathbb{R}} h(l) = \min_{l \in \mathbb{R}} f((\frac{7}{3}, 1) - l(\frac{28}{3}, 6)) = \min_{l \in \mathbb{R}} f(\frac{7}{3} - l\frac{28}{3}, 1 - 6l) = \min_{l \in \mathbb{R}} 2(\frac{7}{3} - l\frac{28}{3})^2 + 3(1 - 6l)^2$$

Como una función cuadrática siempre tiene mínimo o máximo entonces hallamos el punto crítico:  $g'(l) = 4(\frac{7}{3} - l\frac{28}{3})(-\frac{28}{3}) - 36(1 - 6l) = 0$  de donde hallamos  $l_0 = 0,2181$  luego:

$x_1 = (\frac{7}{3}, 1) - 0,2181(\frac{28}{3}, 6) = (0,2977, -0,3086)$  y vemos que:  $f(x_1) = 0,4630$  como se observa  $f(x_1) < f(x_0)$ ; así el proceso continua hasta cumplirse la condición de parada establecida.

**El método de Newton**

El método de Newton es un método numérico que se utiliza para encontrar los ceros de una función. Sea  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vectorial en  $C^1(\mathbb{R}^n)$ .

Un punto  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  será un cero de  $F$  si:

$$F(\bar{x}) = 0 \tag{4}$$

Dada una estimativa  $x_k$  de  $\bar{x}$ , el método de Newton aproxima  $F$  por el hiperplano tangente en el punto  $(x_k, F(x_k))$ , la solución del sistema formado por el hiperplano produce una nueva estimativa para  $\bar{x}$ . La Figura (12) ilustra el procedimiento del método para el caso  $n = 1$ .

Si  $x_k$  es una aproximación a la solución  $\bar{x}$ , entonces en un entorno de  $x_k$  podemos aproximar la ecuación  $F(x) = 0$  por su linealización (polinomio de Taylor de orden 1 alrededor de  $x_k$ ):

$$F(x_k) = -JF(x_k)(x - x_k) \quad (5)$$

y buscar el punto  $x_{k+1}$  que resuelva el sistema (5).

Resolver el sistema lineal es una de las principales desventajas del método de Newton. Se puede realizar mediante factorizaciones de la matriz o usando métodos iterativos que resuelvan sistemas lineales de ecuaciones.

Si sustituimos  $F(x)$  por  $\nabla f(x)$  en (4) tenemos  $\nabla f(x) = 0$ ; así podemos aplicar el método de Newton para obtener los puntos críticos para una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  y resolver un problema de minimización. Sustituyendo  $F(x)$  por  $\nabla f(x)$  en (5) obtenemos  $\nabla f(x_k) = -\nabla^2 f(x_k)d_k$ , donde  $d_k = x - x_k$ ; si  $(\nabla^2 f(x_k))^{-1}$  es no singular entonces se tiene  $d_k = -(\nabla^2 f(x_k))^{-1}\nabla f(x_k)$ .

## Algoritmo

Sea  $x_k$  la  $k$ -ésima iteración,  $l_k$  el tamaño de paso en la  $k$ -ésima iteración,  $\nabla f(x_k)$  y  $\nabla^2 f(x_k)$  el gradiente y la matriz Hessiana de  $f$  en  $x_k$  respectivamente, entonces mientras  $\nabla f(x_k) \neq 0$  realizamos:

### Paso 1

Calculamos  $d_k$  a partir de  $\nabla f(x_k) = -\nabla^2 f(x_k)d_k$ .

### Paso 2

(Regla de Armijo) Tome  $l_1 = 1$ . Hallamos  $l_k$  de modo que:  $f(x_k + l_k d_k) < f(x_k) + l_k \alpha \nabla f(x_k)d_k$ , donde el parámetro  $\alpha \in (0, 1)$ .

### Paso 3

Hacer  $x_{k+1} = x_k + l_k d_k$  y  $k = k + 1$

Puede tomarse como criterio de parada  $\|\nabla f(x_k)\| < \epsilon$  para un  $\epsilon > 0$  fijado al inicio del proceso.

Para resultados de convergencia del método de Newton ver [9].

## Algunas limitaciones

El algoritmo propuesto es una variante del tradicional algoritmo de Newton que requiere una aproximación inicial no arbitraria para poder asegurar la convergencia del método, así la convergencia global no es asegurada, la dirección  $d_k$  puede no ser una dirección de descenso.

Otra dificultad es encontrar la matriz Hessiana de la función objetivo, en general resulta un proceso computacional muy alto. Si el número de variables es muy alto la memoria necesaria para almacenar esta información puede ser insuficiente, en este caso el proceso se torna inviable.

Para el caso de optimización con restricciones los métodos: Método del gradiente proyectado, Métodos de Penalidades, Métodos de Barrera, Métodos de direcciones viables, Métodos de Puntos Interiores, Métodos Quasi Newton son los más usados. Para mayores detalles de estos métodos ver [7].



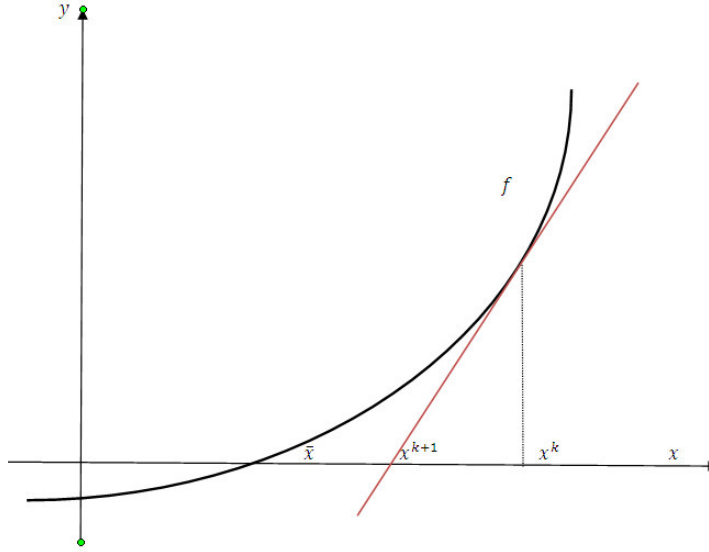


Figura 12: Método de Newton

### 1.5.2. Métodos para problemas no diferenciables

Entre los métodos para resolver problemas de optimización no diferenciable se destacan los Métodos Subgradientes, los Métodos de Planos de Corte y los Métodos de Haces.

#### Métodos Subgradientes

Los Métodos Subgradientes, que surgieron en la década de 60 en la antigua Unión Soviética, fueron los primeros métodos para resolver problemas de optimización no diferenciables.

Este método, basado en el método del gradiente para problemas diferenciables, utiliza una dirección opuesta a un subgradiente como una dirección de búsqueda. Los Métodos Subgradientes poseen una estructura bastante simple y en general presentan buenos resultados numéricos.

El objetivo principal deste trabajo es estudiar con más detalle los Métodos Subgradientes; esto se realizará en el capítulo 4.

#### Métodos de plano de corte

El método del plano cortante de Kelley y Cheney Goldstein se utiliza para problemas en optimización convexa, no necesariamente diferenciable. Este método se basa en el siguiente resultado: Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función convexa y  $x \in \mathbb{R}^n$ , entonces

$$f(x) = \max_{y \in \mathbb{R}^n} \{f(y) + \langle s, x - y \rangle : s \in \partial f(y)\}$$

(ver la Definición 2.2 de subdiferencial  $\partial f(y)$ ).

Consideremos el problema

$$\min_{x \in M} f(x)$$

Asumamos que  $M$  es un conjunto cerrado y que para cada  $x \in M$  un subgradiente de  $f$  en  $x$  puede ser calculado, el método de planos de corte consiste en resolver en la  $k$ -ésima iteración

el problema:

$$\min_{x \in M} f_k(x)$$

Esto es, la función objetivo  $f$  es reemplazada por una aproximación poliedral  $f_k$ , que es construida usando los puntos  $x_i$ , y sus respectivos subgradiientes  $s_i$  para  $i = 0, 1, 2, \dots, k-1$  i.e:

$$f_k(x) = \max \{f(x_0) + \langle x - x_0, s_0 \rangle, f(x_1) + \langle x - x_1, s_1 \rangle, \dots, f(x_{k-1}) + \langle x - x_{k-1}, s_{k-1} \rangle\}$$

y  $x_k$  minimiza  $f_k$  sobre  $M$  i.e

$$f_k(x_k) = \min_{x \in M} f_k(x)$$

Este problema es equivalente al problema lineal:

$$\begin{aligned} & \min z \\ & f(x_i) + s_i(x - x_i) \leq z \quad i = 0, 1, 2, \dots, k-1 \end{aligned}$$

El método de planos de corte están basados en progresivos refinamientos de aproximaciones poliedrales del epigrafo de  $f$  ver Figura (13).

Se asume que el mínimo del problema de arriba puede obtenerse para todo  $k$ . Para esos valores de  $k$  para los cuales esto no ocurre, el conjunto  $M$  puede ser reemplazado por un conjunto compacto que contenga al conjunto optimal estas restricciones son llamadas restricciones de caja.

Cuanto más planos de corte son incrementados, más precisa es la aproximación.

Para el caso particular de tener una función lineal por tramos, el método de planos cortantes converge en una cantidad finita de pasos. Un problema encontrado en estos métodos es que las funciones afines en cada iteración se acrecientan dificultando la resolución del problema. Para mayores detalles del método y resultados de convergencia ver [1].

Entre otros métodos comunmente usados para el caso de optimización no diferenciable tenemos: Métodos de Centros Analíticos, Planos de Corte, Métodos de Haces, entre otros, para mayor información ver [10].

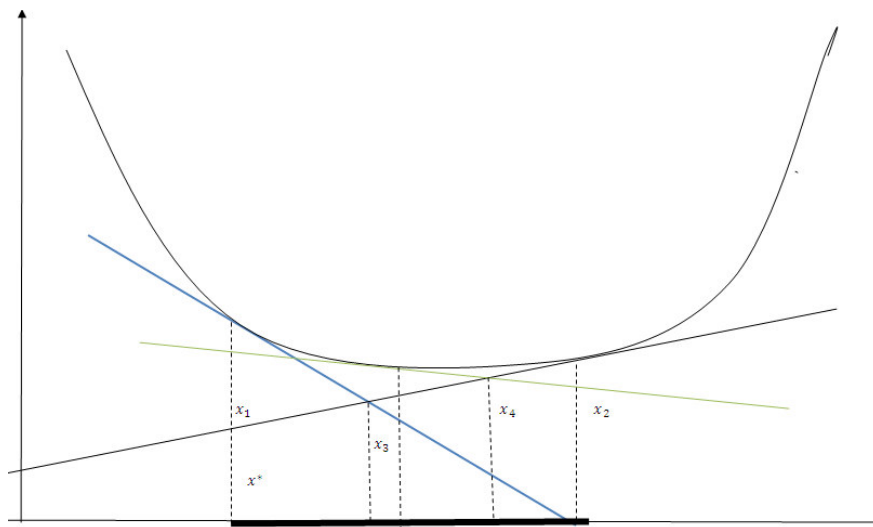


Figura 13: Aproximaciones por planos de corte al epigrafo de la función

# CAPITULO II

## 2. Subgradiente

### 2.1. Derivadas Direccionales

Las funciones convexas poseen algunas propiedades usuales de diferenciabilidad, y una de ellas es la existencia de la derivada direccional lateral (derecha e izquierda) en toda dirección en un punto interior de su dominio, así como en el caso usual de la derivada direccional de una función diferenciable puede ser escrita en términos del vector gradiente, que está asociado con un hiperplano tangente al gráfico de la función, la derivada lateral a derecha de una función convexa, no necesariamente diferenciable puede ser escrita en términos de vectores subgradientes que están asociados con hiperplanos soportes al epigrafo de la función. En lo sucesivo nos referiremos a la derivada direccional derecha como derivada direccional.

**Definición 2.1** Sean  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ; la derivada direccional de  $f$  en  $x$  con respecto a  $y$  es definida como el siguiente límite.

$$f'(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x + ty) - f(x)}{t}$$

si este límite existe.

**Teorema 2.1** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  convexa con constante de Lipschitz  $K$  en  $x \in \mathbb{R}^n$  entonces:

1. La derivada direccional existe para cualesquiera  $y \in \mathbb{R}^n$  y satisface

$$f'(x, y) = \inf_{t > 0} \frac{f(x + ty) - f(x)}{t}$$

2. La función  $y \rightarrow f'(x, y)$  es positiva homogénea y subaditiva en  $\mathbb{R}^n$  con

$$f'(x, y) \leq K \|y\|$$

$$3. -f'(x, -y) \leq f'(x, y).$$

4.  $f'(x, y)$  es semicontinua superior como una función de  $(x, y)$  y Lipschitz con constante  $K$  como función de  $y$ .

### Prueba

Veamos 1.

Sea  $y \in \mathbb{R}^n$  arbitrario, definamos la función  $\phi(t) = \frac{f(x+ty)-f(x)}{t}$ , sea  $\epsilon > 0$  fijo arbitrario probaremos que  $\phi$  es creciente y acotada en  $\langle 0, \epsilon \rangle$ . Sean  $0 < t_1 < t_2 < \epsilon$  entonces:

$$\begin{aligned} \phi(t_2) - \phi(t_1) &= \frac{1}{t_1 t_2} [t_1 f(x + t_2 y) - t_2 f(x + t_1 y) + (t_2 - t_1) f(x)] = \\ &= \frac{1}{t_1} \left[ \frac{t_1}{t_2} f(x + t_2 y) + (1 - \frac{t_1}{t_2}) f(x) - f(\frac{t_1}{t_2}(x + t_2 y) + (1 - \frac{t_1}{t_2})x) \right] \geq 0 \end{aligned}$$

entonces  $\phi$  es creciente. Veamos que es acotada, sea  $0 < t < \epsilon$  se tiene:

$$\begin{aligned} \phi(t) - \phi(-\frac{\epsilon}{2}) &= \frac{\frac{1}{2}f(x + ty) + \frac{1}{2}f(x) + \frac{t}{\epsilon}f(x - \frac{\epsilon}{2}y) + (1 - \frac{t}{\epsilon})f(x) - 2f(x)}{t/2} \geq \\ &= \frac{\frac{1}{2}f(x + \frac{t}{2}y) + \frac{1}{2}f(x - \frac{t}{2}y) - f(x)}{t/4} \geq \frac{f(x) - f(x)}{t/4} = 0 \end{aligned}$$

entonces  $\phi$  es acotada inferiormente, luego existe el límite  $f'(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \phi(t)$  y como la función es creciente se tiene que  $f'(x, y) = \inf_{t > 0} \frac{f(x+ty)-f(x)}{t}$

Ahora veamos 2 primero probemos la desigualdad, utilizando 1 y la condición de Lipschitz tenemos:

$$|f'(x, y)| \leq \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{|f(x + ty) - f(x)|}{t} \leq \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{K \|x + ty - x\|}{t} \leq K \|y\|$$

Ahora mostraremos que  $f'(x, \cdot)$  es positiva homogénea, en efecto sea  $a > 0$

$$f'(x, ay) = a \lim_{l \rightarrow 0^+} \frac{f(x + lay) - f(x)}{la} = a f'(x, y)$$

ahora veamos que es subaditiva, sean  $y, z \in \mathbb{R}^n$  entonces:

$$\begin{aligned} f'(x, y + z) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x + t(y + z)) - f(x)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(\frac{1}{2}(x + 2ty) + \frac{1}{2}(x + 2tz)) - f(x)}{t} \\ &\leq \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x + 2ty) - f(x)}{2t} + \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x + 2tz) - f(x)}{2t} = f'(x, y) + f'(x, z) \end{aligned}$$

se deduce de esto que  $f'(x, \cdot)$  es convexa

La parte 3 es inmediata, de 2 se tiene:

$$0 \leq f'(x, \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}y) \leq \frac{1}{2}f'(x, y) + \frac{1}{2}f'(x, -y)$$

Ahora veamos 4. Sean  $(x_i), (y_i) \subseteq \mathbb{R}^n$  sucesiones tales que  $x_i \rightarrow x$ ,  $y_i \rightarrow y$ , definimos la sucesión  $(t_i) \subseteq \mathbb{R}$  dada por  $t_i = K \|x_i - x\|^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{i}$  entonces claramente  $t_i \rightarrow 0$  y  $t_i > 0$  así se tiene:

$$\begin{aligned} f'(x_i, y_i) &= \liminf_{t>0} \frac{f(x_i + ty_i) - f(x_i)}{t} \leq \frac{f(x_i + t_i y_i) - f(x_i)}{t_i} \\ &= \frac{f(x + t_i y) - f(x)}{t_i} + \frac{f(x_i + t_i y_i) - f(x + t_i y)}{t_i} + \frac{f(x) - f(x_i)}{t_i} \end{aligned}$$

para  $i$  suficientemente grande y usando la condición de Lipschitz tenemos que:

$$\left| \frac{f(x_i + t_i y_i) - f(x + t_i y)}{t_i} \right| \leq \frac{K \|x_i - x\| + K \|t_i y_i - t_i y\|}{t_i} \leq \|x_i - x\|^{\frac{1}{2}} + K \|y_i - y\| \rightarrow 0$$

y

$$\left| \frac{f(x) - f(x_i)}{t_i} \right| \leq \frac{K \|x - x_i\|}{t_i} \leq \|x_i - x\|^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0$$

y tomando límite superior en la desigualdad para  $f'(x_i, y_i)$ , obtenemos:

$$\limsup_{i \rightarrow \infty} f'(x_i, y_i) \leq \limsup_{i \rightarrow \infty} \frac{f(x_i + t_i y_i) - f(x_i)}{t_i} = f'(x, y)$$

esto establece la semicontinuidad superior. Ahora mostaremos la condición de Lipschitz, sean  $y, z \in \mathbb{R}^n$  si  $x + ty, x + tz \in B(x; \epsilon)$ , entonces

$$f(x + ty) - f(x + tz) \leq Kt \|y - z\|$$

luego

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x + ty) - f(x)}{t} \leq \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x + tz) - f(x)}{t} + K \|y - z\|$$

luego  $f'(x, y) - f'(x, z) \leq K \|y - z\|$ . Intercambiando los roles de  $y$  y  $z$  se tiene  $f'(x, z) - f'(x, y) \leq K \|y - z\|$  luego  $|f'(x, y) - f'(x, z)| \leq K \|y - z\|$ . Esto concluye la prueba del teorema.  $\square$

## 2.2. Subgradientes y Subdiferenciales

**Definición 2.2** Sean  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Un vector  $s \in \mathbb{R}^n$  tal que:

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle s, x - x_0 \rangle, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

es llamado un subgradiente de  $f$  en  $x_0$ .

El conjunto de subgradiientes de una función  $f$  en el punto  $x_0$  es llamado el subdiferencial de  $f$  en  $x_0$  y se denota por  $\partial f(x_0)$ .

**Definición 2.3** Si  $\partial f(x_0) \neq \emptyset$  entonces diremos que  $f$  es subdiferenciable en  $x_0$ .

Geométricamente,  $s \in \mathbb{R}^n$  es un subgradiente de la función convexa  $f$  en  $x_0$  si el gráfico de  $f$  en  $\mathbb{R}^{n+1}$  esta por encima del gráfico del hiperplano  $y = f(x_0) + \langle s, x - x_0 \rangle$ . Como  $(x_0, f(x_0))$  esta en el hiperplano, este hiperplano constituye un hiperplano soporte a  $\text{epi}(f)$  en  $(x_0, f(x_0))$ . Esto es, la existencia de un vector subgradiente establece la existencia de un hiperplano soporte no vertical a  $\text{epi}(f)$  en  $(x_0, f(x_0))$ .

La Figura (14) muestra un ejemplo para el caso  $n = 1$ .

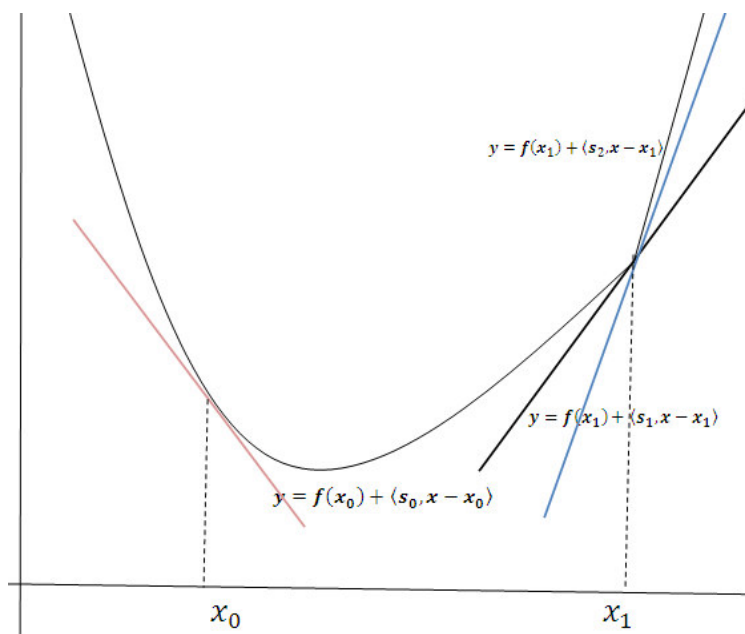


Figura 14:  $s_0$  es un subgradiente de  $f$  en  $x_0$ , y  $s_1, s_2$  en  $x_1$

### Ejemplo 2.1

Sea  $f(x) = \sin(x)$  y  $x_0 = -\frac{\pi}{2}$  se tiene que 0 es un subgradiente; en efecto:  $\sin(x) \geq -1 + 0 \cdot (x + \frac{\pi}{2})$ , para toda  $x \in \mathbb{R}$ , más adelante se verá que  $\partial f(x_0) = \{0\}$ .

### Ejemplo 2.2

Sea  $f(x) = \|x\|$ , veamos que  $\partial f(0) = \{s \in \mathbb{R}^n : \|s\| \leq 1\}$ . En efecto sea  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $\|s\| \leq 1$  utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwartz tenemos :  $\|x\| \geq \langle s, x \rangle$  lo que equivale a  $\|x\| \geq \|0\| + \langle s, x - 0 \rangle$  entonces  $s \in \partial f(0)$  por otro lado sea  $s \in \partial f(0)$  si  $s = 0$  entonces claramente  $\|s\| \leq 1$ , consideremos  $s \neq 0$  entonces  $\|x\| \geq \langle s, x \rangle$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  tomemos  $x = s$  entonces  $\|s\| \geq \|s\|^2$  entonces  $\|s\| \leq 1$ . Si  $x \neq 0$  se tiene que  $\partial f(x) = \left\{ \frac{x}{\|x\|} \right\}$  como se verá luego.

### Ejemplo 2.3

Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(x) = -\sqrt{|x|}$  y  $x_0 = 0$  es inmediato ver que si existiese un subgradiente  $s$  en  $x_0$  entonces  $s < 0$  y  $-\sqrt{|x|} \geq sx$ , para toda  $x \in \mathbb{R}$  tomando  $x = \frac{1}{4s^2}$  tenemos que  $2s \geq s$  lo cual es absurdo luego  $\partial f(x_0) = \emptyset$ .

El siguiente teorema muestra la relación entre el subdiferencial y la derivada direccional a derecha.

**Teorema 2.2** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  convexa y  $x \in \mathbb{R}^n$  (fijo, arbitrario). Se cumplen:

1.  $\partial f(x) = \{s \in \mathbb{R}^n : f'(x, y) \geq \langle s, y \rangle, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n\}$ .
2.  $\partial f(x)$  es no vacío, convexo y compacto y  $\partial f(x) \subseteq B(x, K)$  donde  $K$  es la constante de Lipschitz de  $f$  en  $x$ .
3.  $f'(x, y) = \max_{s \in \partial f(x)} \langle s, y \rangle, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$ .

#### Prueba:

Veamos 1, sea  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $s \in \partial f(x)$  entonces  $f(z) \geq f(x) + \langle s, z - x \rangle, \forall z \in \mathbb{R}^n$ , tomemos  $z = x + \alpha y, y \in \mathbb{R}^n, \alpha > 0$  entonces reemplazando en esta desigualdad tenemos:

$$\frac{f(x + \alpha y) - f(x)}{\alpha} \geq \langle s, y \rangle$$

luego si  $\alpha \rightarrow 0^+$  tenemos

$$f'(x, y) \geq \langle s, y \rangle \quad \text{para toda } y \in \mathbb{R}^n.$$

Ahora sea  $s \in \mathbb{R}^n$  tal que

$$f'(x, y) \geq \langle s, y \rangle \quad \text{para toda } y \in \mathbb{R}^n.$$



entonces puesto que  $f'(x, y) = \inf_{\alpha > 0} \frac{f(x + \alpha y) - f(x)}{\alpha}$  tomando  $\alpha = 1$  se tiene  $f(x + y) - f(x) \geq f'(x, y) \geq \langle s, y \rangle$ , para toda  $y \in \mathbb{R}^n$  esto implica que  $s \in \partial f(x)$ , luego:

$$s \in \partial f(x) \quad \text{si y solo si} \quad f'(x, y) \geq \langle s, y \rangle \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

de esto se tiene 1.

Veamos 2.

Por el Teorema 2.1 la función  $f'(x; \cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es positiva homogénea y subaditiva aplicando el Teorema de Hahn-Banach tenemos que existe  $s \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\langle s, y \rangle \leq f'(x, y)$  para toda  $y \in \mathbb{R}^n$  entonces por la parte 1,  $s \in \partial f(x)$  así  $\partial f(x) \neq \emptyset$ . Ahora veamos que es convexo, sean  $s_1, s_2 \in \partial f(x)$  y  $l \in [0, 1]$  entonces por 1 se tiene para toda  $y \in \mathbb{R}^n$ :

$$\langle ls_1 + (1-l)s_2, y \rangle = l \langle s_1, y \rangle + (1-l) \langle s_2, y \rangle \leq lf'(x, y) + (1-l)f'(x, y) = f'(x, y)$$

entonces por 1, tenemos  $ls_1 + (1-l)s_2 \in \partial f(x)$  así  $\partial f(x)$  es convexo. Veamos que es acotado, por la parte 1 y el Teorema 2.1 tenemos que si  $s \in \partial f(x)$  entonces:

$$\|s\|^2 = \langle s, s \rangle \leq f'(x, s) \leq K \|s\|$$

así  $\partial f(x)$  es acotado. Veamos que también es cerrado, sea  $(s_i) \subseteq \partial f(x)$  tal que  $s_i \rightarrow s$  entonces :

$$\langle s, y \rangle = \lim_{i \rightarrow \infty} \langle s_i, y \rangle \leq \lim_{i \rightarrow \infty} f'(x, y) = f'(x, y) \quad \text{para toda } y \in \mathbb{R}^n$$

así se tiene que  $s \in \partial f(x)$ , entonces  $\partial f(x)$  es cerrado, luego compacto.

Veamos 3. De 1 se sigue que:

$$f'(x, y) \geq \max_{s \in \partial f(x)} \langle s, y \rangle, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

basta probar  $f'(x, y) \leq \max_{s \in \partial f(x)} \langle s, y \rangle$

Sea  $y \in \mathbb{R}^n$  fijo arbitrario; consideremos los subconjuntos de  $\mathbb{R}^{n+1}$ :

$$C_1 = \{(z, w) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : f(z) < w\}$$

$$C_2 = \{(z, w) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : z = x + \alpha y, w = f(x) + \alpha f'(x, y), \alpha \geq 0\}$$

es claro que ambos conjuntos son no vacíos, utilizando la sublinealidad de la derivada direccional y la convexidad de la función es inmediato verificar que los conjuntos son convexos y disjuntos. Usando el Teorema 1.9 existe un vector no nulo  $(u, \gamma) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  tal que:

$$\gamma w + \langle u, z \rangle \geq \gamma(f(x) + \alpha f'(x, y)) + \langle u, x + \alpha y \rangle, \quad \forall \alpha \geq 0, \quad z \in \mathbb{R}^n, \quad w > f(z) \quad (6)$$

No puede darse que  $\gamma < 0$ , pues fijando  $\alpha, z$  y tomando límite  $w \rightarrow +\infty$  llegamos a un absurdo. Si  $\gamma = 0$  y tomando  $\alpha = 0$  entonces se tendria:  $\langle u, z \rangle \geq \langle u, x \rangle, \forall z \in \mathbb{R}^n$ , lo cual es absurdo; luego  $\gamma > 0$  dividiendo entre  $\gamma$  en (6) y denotando  $\frac{u}{\gamma}$  por  $u$  tenemos:

$$w + \langle u, z - x \rangle \geq f(x) + \alpha f'(x, y) + \alpha \langle u, y \rangle, \quad \forall \alpha \geq 0, z \in \mathbb{R}^n, w > f(z) \quad (7)$$

haciendo  $\alpha = 0$ , y tomando límite  $w \rightarrow f(z)$ , tenemos  $f(z) \geq f(x) - \langle z - x, u \rangle$ , para toda  $z \in \mathbb{R}^n$ , entonces  $-u \in \partial f(x)$ , en (7) tomemos  $z = x$ ,  $\alpha = 1$  y haciendo  $w \rightarrow f(z)$  tenemos  $\langle -u, y \rangle \geq f'(x, y)$  entonces  $f'(x, y) \leq \max_{s \in \partial f(x)} \langle s, y \rangle$ , esto concluye la prueba.  $\square$

## Ejemplo 2.4

Consideremos la función convexa  $f(x, y) = |x + y|$  sean  $p = (1, 1)$  y  $q = (-1, -1)$  se tiene que  $\partial f(0) = [p, q]$ ; en efecto: es fácil ver que  $p, q \in \partial f(0)$  luego por la convexidad de  $\partial f(0)$  se tiene  $[p, q] \subseteq \partial f(0)$ , ahora sea  $(a, b) \in \partial f(0)$  entonces  $|x + y| \geq \langle (a, b), (x, y) \rangle$ , tomando  $(x, y)$  como  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(1, -1)$  y  $(-1, 1)$ , deducimos que  $a = b$  y  $-1 \leq a \leq 1$  y puesto que  $(a, b) = (\frac{a+1}{2})p + (\frac{1-a}{2})q$  entonces  $\partial f(0) \subseteq [p, q]$ .  $\square$

La definición de subgradiente dada para una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  puede ser extendida para una función definida en un conjunto  $C \subseteq \mathbb{R}^n$ ;  $s$  es un subgradiente de  $f$  en  $x_0 \in C$  si

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle s, x - x_0 \rangle, \quad \forall x \in C$$

El siguiente teorema establece que toda función convexa es subdiferenciable en el interior de su dominio.

**Teorema 2.3** *Sea  $f$  una función convexa definida en un conjunto convexo  $C$ , entonces en cada punto  $x_0 \in \text{int}(C)$  se tiene que  $\partial f(x_0) \neq \emptyset$ .*

### Prueba:

El punto  $(x_0, f(x_0))$  es un punto frontera de  $\text{epi}(f)$  y como  $\text{epi}(f)$  es convexo podemos aplicar el Teorema 1.11 tomando  $C = \text{epi}(f)$ , entonces existe un vector no nulo  $(a, \beta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  tal que

$$\langle (a, \beta), (x, y) \rangle \leq \langle (a, \beta), (x_0, f(x_0)) \rangle$$

para todo  $(x, y) \in \text{epi}(f)$ , esta relación es equivalente a:

$$\langle a, x \rangle + \beta y \leq \langle a, x_0 \rangle + \beta f(x_0) \quad (8)$$

como el lado derecho es independiente de  $y$  y  $y \geq f(x)$  para todo  $x \in C$ , si  $\beta > 0$  el lado izquierdo se puede hacer tan grande como se quiera haciendo variar  $y$ , lo cual es una contradicción, por lo tanto  $\beta \leq 0$ .

Si  $\beta = 0$  entonces  $a \neq 0$  luego para todo  $x \in C$  se tiene

$$\langle x, a \rangle \leq \langle x_0, a \rangle.$$

Como  $x_0 \in \text{int}(C)$  entonces existe  $\epsilon > 0$  tal que  $x_1 = x_0 + a\epsilon \in C$ , tomando  $x = x_1$  en la última desigualdad obtenemos:  $\epsilon \langle a, a \rangle \leq 0$  lo cual es absurdo. Luego  $\beta < 0$ , dividiendo ambos miembros de (8) por  $\beta$  y tomando  $y = f(x)$  obtenemos:

$$f(x) \geq f(x_0) + \left\langle -\frac{a}{\beta}, x - x_0 \right\rangle \quad \text{para toda } x \in C \quad (9)$$

así  $-\frac{a}{\beta} \in \partial f(x_0)$ , esto concluye la prueba.  $\square$

**Colorario 2.1** Si  $f$  es estrictamente convexa la desigualdad estricta ocurre en (9) para  $x \neq x_0$ .

### Prueba

La prueba se basa en el Teorema 1.14.  $\square$

### Observación 2.1

El recíproco del Teorema 2.3 es falso ver [3].

La condición de ser punto interior es indispensable, por ejemplo si se considera la función convexa  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = -\sqrt{x}$  entonces se tiene que  $\partial f(0) = \emptyset$ .  $\square$

Un resultado similar se obtiene para una función cóncava. En este caso si  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , un vector  $s$  es un subgradiente de  $f$  en  $x_0$  si:

$$f(x) \leq f(x_0) + \langle s, x - x_0 \rangle, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Como una aplicación del teorema anterior se tiene que toda función convexa y cóncava en  $\mathbb{R}^n$  es afín esto es  $f(x) = \langle x, a \rangle + b$ .

En efecto; utilizando el Teorema 2.3 y aplicandolo a las funciones  $f$  y  $-f$  y tomando  $x_0 = 0$  tenemos que existen  $s_1, s_2 \in \mathbb{R}^n$  tales que :

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(0) + \langle s_1, x \rangle \\ -f(x) &\geq -f(0) + \langle s_2, x \rangle \end{aligned}$$

para toda  $x \in \mathbb{R}^n$  sumando ambos miembros y usando la bilinealidad del producto interno tenemos que:

$$0 \geq \langle s_1 + s_2, x \rangle$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ ; tomemos  $x = s_1 + s_2$  entonces

$$0 \geq \|s_1 + s_2\|^2$$

luego  $s_1 = -s_2$  así se tiene que

$$f(x) = f(0) + \langle s_1, x \rangle.$$

**Teorema 2.4** Sea  $C$  un conjunto convexo en  $\mathbb{R}^n$ . Si  $f$  posee un subgradiente en cada punto  $x \in C$ , entonces  $f$  es convexa en  $C$ .

**Prueba:**

Sean  $x, y$  dos puntos de  $C$  y sea  $z = \alpha x + \beta y$  con  $\alpha, \beta \geq 0$  y  $\alpha + \beta = 1$ , como  $f$  posee un subgradiente en  $z$ , digamos  $s$ , entonces

$$f(x) \geq f(z) + \langle s, x - z \rangle = f(z) + \beta \langle s, x - y \rangle$$

$$f(y) \geq f(z) + \langle s, y - z \rangle = f(z) - \alpha \langle s, x - y \rangle$$

multiplicando la primera desigualdad por  $\alpha > 0$  y la segunda desigualdad por  $\beta > 0$  y sumando ambas desigualdades tenemos:

$$\alpha f(x) + \beta f(y) \geq f(z) = f(\alpha x + \beta y)$$

entonces  $f$  es convexa.  $\square$

**Teorema 2.5** Sea  $f$  una función convexa definida en un conjunto convexo  $C$  de  $\mathbb{R}^n$  y sea  $x$  un punto interior de  $C$ .

$f$  es diferenciable en  $x$  si y sólo si posee un único subgradiente en  $x$ .

En tal caso  $\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$ .

**Prueba**

Sea  $f$  diferenciable en  $x$ . Como  $f$  es convexa y  $x \in \text{int}(C)$  entonces  $\partial f(x)$  es no vacío. Sean  $\xi \in \partial f(x)$ ,  $h \in \mathbb{R}^n$  y  $t > 0$  suficientemente pequeño, tenemos:

$$f(x + th) \geq f(x) + \langle \xi, th \rangle$$

Por otro lado como  $f$  es diferenciable en  $x$  tenemos para  $h \neq 0$

$$f(x + th) = f(x) + \langle \nabla f(x), th \rangle + r(th)$$

donde  $\frac{r(th)}{t\|h\|} \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow 0$ . Si hacemos la diferencia entre estas dos relaciones obtenemos:

$$0 \geq t \left[ \langle \xi, h \rangle - \langle \nabla f(x), h \rangle - \frac{r(th) \|h\|}{t \|h\|} \right]$$

dividiendo entre  $t > 0$  y tomando el límite  $t \rightarrow 0$  obtenemos:

$0 \geq \langle \xi - \nabla f(x), h \rangle$  para toda  $h \in \mathbb{R}^n$  tomando en particular  $h = \xi - \nabla f(x)$  obtenemos  $\xi = \nabla f(x)$ .

Ahora supongamos que para  $x \in \text{int}(C)$ ,  $\partial f(x)$  es unitario con único elemento  $\xi$  mostraremos que  $f$  es diferenciable y que  $\xi = \nabla f(x)$ .

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $x = 0$  y  $f(x) = 0$ ; caso contrario si  $x = a$  y  $f(x) = b$  definimos la función  $q(x) = f(x + a) - b$ , es fácil ver que  $q$  es diferenciable en 0 si y solo si  $f$  es diferenciable en  $a$ .

Vamos a probar que las primeras derivadas parciales de  $f$  existen en  $x = 0$ ; supongamos que  $\frac{\partial f(0)}{\partial x_1}$  no existe, definamos la función:

$g(t) = f(0 + te_1)$  donde  $t \in I$  es el intervalo maximal tal que  $te_1 \in C$ , afirmamos que sobre

ese intervalo,  $g$  es convexa; en efecto sean  $t_1, t_2 \in I$ ,  $\alpha, \beta \geq 0$  con  $\alpha + \beta = 1$  entonces se tiene  $g(\alpha t_1 + \beta t_2) = f((\alpha t_1 + \beta t_2)e_1) = f(\alpha t_1 e_1 + \beta t_2 e_1) \leq \alpha f(t_1 e_1) + \beta f(t_2 e_1) = \alpha g(t_1) + \beta g(t_2)$ . Por otro lado tenemos que  $\frac{\partial f}{\partial x_1}$  no existe si y solo si  $g'(0)$  no existe. Como  $g$  es convexa se sigue del Teorema 1.2 (ver [3]) que  $g'_+(0)$  y  $g'_-(0)$  existen y además satisfacen  $g'_+(0) \leq g'_-(0)$ . Como  $g'(0)$  no existe entonces la desigualdad es estricta.

Sea  $\xi_1 \in \mathbb{R}$  tal que :

$$g'_-(0) < \xi_1 < g'_+(0)$$

Ahora mostraremos que para cada  $\xi_1$  es posible hallar  $\xi \in \partial f(0)$  y que distintos  $\xi_1$  determinan distintos  $\xi$  esto seria una contradicción con la hipótesis de que solo hay un único subgradiente. Se sigue del Teorema 1.2 (ver [3]) que para  $h > 0$  se tiene

$$\frac{g(-h) - g(0)}{-h} \leq g'_-(0) < \xi_1 < g'_+(0) \leq \frac{g(h) - g(0)}{h}$$

en efecto en el teorema se muestra que la función  $s(w, c)$  definida por  $s(w, c) = \frac{g(w) - g(c)}{w - c}$  con  $w \neq c$  es creciente respecto a  $w$ , entonces si  $h > 0$ ,  $-h < -t < 0$  y  $c = 0$  luego se tiene que :

$$\frac{g(-h) - g(0)}{-h} \leq \frac{g(-t) - g(0)}{-t}$$

tomando límite cuando  $t \rightarrow 0$  se tiene la primera desigualdad. Análogamente se obtiene la última desigualdad.

Como  $g(0) = f(0) = 0$  de las últimas desigualdades tenemos que:

$$h\xi_1 < g(h) = f(he_1)$$

para  $h \in I$  y la igualdad ocurre en  $h = 0$ .

Sea  $V_1 = \text{span}(\{e_1\})$  sobre  $V_1$  definimos el funcional  $L_1$  dada por :

$$L_1(x) = L_1(te_1) = \xi_1 t \quad \text{para } x = e_1 t \in V_1$$

Es claro que este funcional está bien definido.

Para  $x \in V_1 \cap C$  tenemos de las dos últimas igualdades, que:

$$f(x) \geq L_1(x) = t\xi_1$$

nótese que si  $n = 1$  se tiene que  $V_1 = \mathbb{R}$  y  $\xi_1 \in \partial f(0)$  así el teorema estaría probado; caso contrario:

sea  $V$  el subespacio bidimensional generado por  $e_1, e_2$

$$V_2 = \{y; y = te_1 + ue_2, t, u \in \mathbb{R}\} = \{y; y = x + ue_2, x \in V_1, u \in \mathbb{R}\}$$

extendemos el funcional lineal  $L_1$  a un funcional lineal definido sobre  $V_2$  y ahora hallaremos un  $\xi_2$  tal que para  $y \in V_2 \cap C$  se tenga :

$$f(y) \geq L_1(y) = t\xi_1 + u\xi_2$$

Sean  $x, z \in V_1 \cap C$  y sean  $\alpha, \beta > 0$  entonces se sigue de la linealidad de  $L_1$ , de la convexidad de  $V_1 \cap C$  y de la convexidad de  $f$  que :

$$\frac{\alpha}{\alpha + \beta} L_1(x) + \frac{\beta}{\alpha + \beta} L_1(z) = L_1\left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta} x + \frac{\beta}{\alpha + \beta} z\right) \leq f\left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta} x + \frac{\beta}{\alpha + \beta} z\right) =$$

$$f\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}(x-\beta e_2) + \frac{\beta}{\alpha+\beta}(z+\alpha e_2)\right) \leq \frac{\alpha}{\alpha+\beta}f(x-\beta e_2) + \frac{\beta}{\alpha+\beta}f(z+\alpha e_2)$$

multiplicando por  $\alpha + \beta$  obtenemos

$$\alpha L_1(x) + \beta L_1(z) \leq \alpha f(x - \beta e_2) + \beta f(z + \alpha e_2)$$

que es equivalente a :

$$\frac{L_1(x) - f(x - \beta e_2)}{\beta} \leq \frac{f(z + \alpha e_2) - L_1(z)}{\alpha}$$

denotemos el lado izquierdo por  $\lambda(x, \beta)$  y el lado derecho por  $\rho(z, \alpha)$ , tenemos :

$$\sup \{\lambda(x, \beta) : x \in V_1 \cap C, \beta > 0\} \leq \inf \{\rho(z, \alpha) : z \in V_1 \cap C, \alpha > 0\}$$

luego existe un número  $\xi_2$  tal que :

$$\frac{L_1(x) - f(x - \beta e_2)}{\beta} \leq \xi_2 \leq \frac{f(x + \alpha e_2) - L_1(x)}{\alpha}$$

para toda  $x \in V_1 \cap C$ ,  $\alpha, \beta > 0$ .

Ahora sea  $y \in (V_2 \cap C) \setminus V_1$  entonces  $y = x + ue_2$  con  $x = te_1$ ,  $u \neq 0$ . Si  $u > 0$  tomamos  $\alpha = u$ , si  $u < 0$  tomamos  $\beta = -u$  entonces de la desigualdad anterior tenemos que para toda  $y \in V_2 \cap C$ :

$$f(y) = f(x + ue_2) \geq L_1(x) + u\xi_2 = t\xi_1 + u\xi_2$$

procediendo de manera inductiva tenemos que para cada  $\xi_1$  se puede hallar un vector  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  tal que para cada  $x \in C$

$$f(x) \geq \langle \xi, x \rangle$$

y como  $f(0) = 0$  se tiene que  $\xi \in \partial f(0)$  esto concluye la prueba.  $\square$

**Teorema 2.6** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función convexa.

1. Si  $X$  es un conjunto acotado, entonces el conjunto  $\bigcup_{x \in X} \partial f(x)$  es acotado.
2. Si una sucesión  $(x_k)$  converge a un vector  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $s_k \in \partial f(x_k)$  para toda  $k = 0, 1, \dots$ , entonces la sucesión  $(s_k)$  es acotada y cada punto limite es un subgradiente de  $f$  en  $x$ .

### Prueba

Supongamos que  $\bigcup_{x \in X} \partial f(x)$  no es acotado entonces existe una sucesión  $(s_k)$  no acotada y correspondientemente una sucesión  $(x_k) \subseteq X$ . Sin pérdida de generalidad se puede asumir

que  $s_k \neq 0$ , para toda  $k \in \mathbb{N}$ , sea  $y_k = \frac{s_k}{\|s_k\|}$ , es claro que las sucesiones  $(x_k)$ ,  $(y_k)$ , son acotadas entonces poseen subsucesiones convergentes sin pérdida de generalidad asumamos que  $(x_k)$  y  $(y_k)$ , convergen a  $x$  e  $y$ , respectivamente, como  $s_k \in \partial f(x_k)$  entonces:  $f(x_k + y_k) - f(x_k) \geq \langle s_k, y_k \rangle = \|s_k\|$ , como  $f$  es continua entonces el lado izquierdo converge a  $f(x + y) - f(x)$  mientras que el lado izquierdo para  $\infty^+$ , lo cual es absurdo.

Veamos la parte 2 Por el Teorema 2.2 ,

$$\langle y, s_k \rangle \leq f'(x_k, y)$$

para toda  $y \in \mathbb{R}^n$

Sea  $X = \{x_1, x_2, \dots\}$  entonces  $X$  es acotado, luego por la parte 1 se tiene que  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}_0^+} \partial f(x_k)$  es acotado, luego la sucesión  $(s_k)$  es acotada, sea  $s$  un punto límite de  $(s_k)$  entonces tomando límite superior en la desigualdad anterior tenemos:

$$\langle y, s \rangle = \limsup_{k \rightarrow +\infty} f'(x_k, y) \leq f'(x, y)$$

luego  $\langle y, s \rangle \leq f'(x, y)$  para toda  $y \in \mathbb{R}^n$  entonces  $s \in \partial f(x)$ .  $\square$

Los siguientes resultados conciernen al cálculo de subgradientes.

**Teorema 2.7** 1. Sean  $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , funciones convexas. Sea  $f = f_1 + f_2 + \dots + f_m$  entonces

$$\partial f(x) = \partial f_1(x) + \dots + \partial f_m(x).$$

2.  $\partial(\alpha f)(x) = \alpha \partial f(x)$  para toda  $\alpha > 0$ .

3. Para la función máximo por partes, dada por:  $f(x) = \max \{f_i(x) : i = 1, 2, \dots, m\}$  donde  $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  son convexas, se tiene:

$$\partial f(x) = co \left( \bigcup_{i \in I(x)} \partial f_i(x) \right)$$

donde  $I(x) = \{i \in I_m : f_i(x) = f(x)\}$ ; si las  $f_i$  son diferenciables tenemos que

$$\partial f(x) = co \{ \nabla f_i(x) : i \in I(x) \}$$

## Prueba

Probaremos la parte 1, basta probar para el caso  $m = 2$ . Veamos que  $\partial f(x) \supseteq \partial f_1(x) + \partial f_2(x)$ . Sean  $s_1 \in \partial f_1(x)$ ,  $s_2 \in \partial f_2(x)$  entonces se tiene para toda  $z \in \mathbb{R}^n$ :

$$\begin{aligned} f_1(z) &\geq f_1(x) + \langle z - x, s_1 \rangle \\ f_2(z) &\geq f_2(x) + \langle z - x, s_2 \rangle \end{aligned}$$

luego sumando tenemos  $(f_1 + f_2)(z) \geq (f_1 + f_2)(x) + \langle s_1 + s_2, z - x \rangle$  lo que significa que  $s_2 + s_1 \in \partial f(x)$ .

Supongamos ahora que exista  $s \in \partial f(x)$  tal que  $s \notin \partial f_1(x) + \partial f_2(x)$ , por el Teorema 2.2, los conjuntos  $\partial f_1(x), \partial f_2(x)$  son compactos y convexos entonces también lo es  $\partial f_1(x) + \partial f_2(x)$ , entonces existe un hiperplano que separa estrictamente  $s$  con  $\partial f_1(x) + \partial f_2(x)$  esto es existe un vector  $y \neq 0$  y un escalar  $b$  tales que:

$$\langle y, s_1 + s_2 \rangle < b < \langle y, s \rangle$$

para cualesquiera  $s_1 \in \partial f_1(x), s_2 \in \partial f_2(x)$  entonces

$$\sup_{s_1 \in \partial f_1(x)} \langle y, s_1 \rangle + \sup_{s_2 \in \partial f_2(x)} \langle y, s_2 \rangle < \langle y, s \rangle$$

luego  $f'_1(x, y) + f'_2(x, y) < \langle y, s \rangle$  luego  $f'(x, y) < \langle y, s \rangle$  esto contradice el hecho de que  $s \in \partial f(x)$ , lo que termina la prueba. La parte 2 es inmediata de la definición de subdiferencial; para la parte 3 ver [11] ( Lema 3.1.10).  $\square$

Finalmente mostraremos la regla de la cadena para derivadas direccionales y subgradiientes.

### **Teorema 2.8** *(Regla de la cadena)*

1. Sea  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  una función convexa, y sea  $A$  una matriz de orden  $m \times n$  entonces el subdiferencial de la función  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definido por  $F(x) = f(Ax)$  es dado por:

$$\partial F(x) = A^T \partial f(Ax) = \{A^T s : s \in \partial f(Ax)\}$$

2. Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función convexa, y sea  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  función convexa diferenciable, entonces la función  $F$  definida por  $F(x) = g(f(x))$  posee derivadas direccionales en todas las direcciones. además para todo  $x$ , esta derivada direccional es dado por:

$$F'(x, y) = g'(f(x))f'(x, y)$$

además si  $g$  es no decreciente entonces  $F$  es convexa y su subdiferencial es dado por:

$$\partial F(x) = g'(f(x))\partial f(x), \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n$$

**Prueba** . Ver [1].

**Colorario 2.2** Si  $h(x) = f(Ax + b)$  con  $b \in \mathbb{R}^m$  entonces  $\partial h(x) = A^T \partial f(Ax + b)$

**Prueba.** Ver [1].



### 2.2.1. $\epsilon$ - Subgradientes

En Optimización no diferenciable, los llamados métodos de corte son basados en la teoría del  $\epsilon$ -subdiferencial, que es una extensión del subdiferencial ordinario.

**Definición 2.4** Sean  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función convexa,  $\epsilon > 0$ . La derivada  $\epsilon$ -direccional de  $f$  en  $x$  en la dirección del vector  $y \in \mathbb{R}^n$  es definida por:

$$f'_\epsilon(x, y) = \inf_{t>0} \frac{f(x + ty) - f(x) - \epsilon}{t}$$

**Teorema 2.9** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función convexa, con constante de Lipschitz  $K$  en  $x \in \mathbb{R}^n$  entonces:

1. La función  $y \rightarrow f'_\epsilon(x, y)$  es positiva homogénea y subaditiva en  $\mathbb{R}^n$  con

$$|f'_\epsilon(x, y)| \leq K \|y\|$$

2.  $f'_\epsilon(x, y)$  es semicontinua superior como función de  $(x, y)$  y Lipschitz con constante  $K$  como función de  $y \in \mathbb{R}^n$ .

3.  $-f'_\epsilon(x, -y) \leq f'_\epsilon(x, y)$ .

**Prueba .** Ver [2].

**Definición 2.5** Dada una función convexa  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  y  $\epsilon \geq 0$  decimos que el vector  $d \in \mathbb{R}^n$  es un  $\epsilon$ -subgradiente en  $x \in \mathbb{R}^n$  si

$$f(z) \geq f(x) + \langle z - x, d \rangle + \epsilon \quad \text{para toda } z \in \mathbb{R}^n$$

reescribiendo la desigualdad anterior tenemos

$$\langle z, -d \rangle + f(z) \geq \langle x, -d \rangle + f(x) - \epsilon$$

para toda  $z \in \mathbb{R}^n$ , así  $d$  es un  $\epsilon$ -subgradiente en  $x \in \mathbb{R}^n$  si y solo si el epigrafo de  $f$  está contenido en el semiespacio positivo del hiperplano en  $\mathbb{R}^{n+1}$  con normal  $(-d, 1)$  pasando através del punto  $(x, f(x) - \epsilon)$ . Con  $\partial_\epsilon f(x)$  denotaremos el conjunto de todos los  $\epsilon$ -subgradientes de  $f$  en  $x$ . Para el caso  $n = 1$  ver la Figura (15).

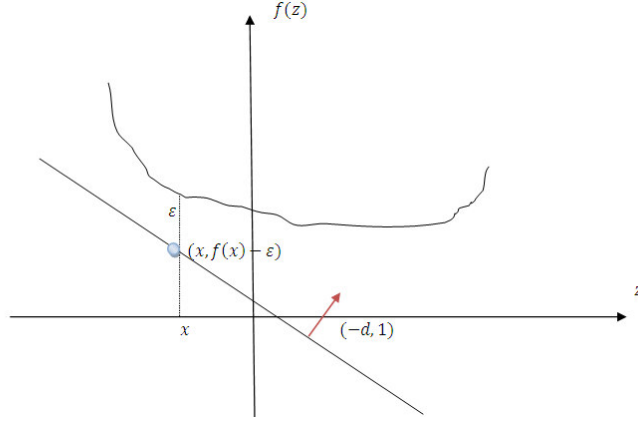


Figura 15: Ilustración de un  $\epsilon$ -subgradiente para una función convexa  $f$  en  $x$

**Teorema 2.10** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función convexa con constante de Lipschitz  $K$  en  $x \in \mathbb{R}^n$  entonces :

1.  $\partial_0 f(x) = \partial f(x)$ .
2. Si  $\epsilon_1 \leq \epsilon_2$  entonces  $\partial_{\epsilon_1} f(x) \subseteq \partial_{\epsilon_2} f(x)$ .
3.  $\partial_{\epsilon} f(x)$  es un conjunto no vacío, convexo y compacto tal que  $\|g\| \leq K$ , para todo  $g \in \partial_{\epsilon} f(x)$ .
4.  $f'_{\epsilon}(x, d) = \max \{ \langle g, d \rangle ; g \in \partial_{\epsilon} f(x), \forall d \in \mathbb{R}^n \}$ .
5.  $\partial_{\epsilon} f(x) = \{ g \in \mathbb{R}^n : f'_{\epsilon}(x, d) \geq \langle g, d \rangle, \forall d \in \mathbb{R}^n \}$ .

**Prueba .** Ver [2].

## Observación 2.2

De la parte 2 del teorema anterior, en particular se tiene que  $\partial f(x) \subseteq \partial_{\epsilon} f(x)$  para todo  $\epsilon \geq 0$ , en el método del subgradiente estudiado en el capítulo siguiente es necesario el conocimiento de un subgradiente en cada iteración; esta inclusión permite en ocasiones en la cual sea complicado calcular el subdiferencial  $\partial f(x)$  (que en la práctica lo es ) elegir un elemento en  $\partial_{\epsilon} f(x)$ , este elemento puede verse como un subgradiente “aproximado”.

## 2.3. Condiciones de Optimalidad

Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función convexa no necesariamente diferenciable y consideremos el problema convexo:

$$PC \quad f^* = \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

**Teorema 2.11** *Para el problema PC;  $x^*$  es un punto óptimo si y sólo si  $0 \in \partial f(x^*)$ .*

### Prueba

Es inmediato a partir de la desigualdad:

$$f(x^*) + \langle 0, x - x^* \rangle \leq f(x)$$

□

El siguiente teorema extienden los Teoremas 1.21 y 1.26 .

**Teorema 2.12** *Sea  $f$  una función convexa en  $\mathbb{R}^n$  y  $C$  un conjunto convexo en  $\mathbb{R}^n$ , consideremos el problema de optimización:*

$$\min_{x \in C} f(x)$$

*Entonces  $x^*$  es un mínimo global de  $f$  sobre  $C$  si y solo si existe  $s \in \partial f(x^*)$  tal que  $\langle s, x - x^* \rangle \geq 0$  para toda  $x \in C$ .*

### Prueba ( $\Leftarrow$ )

Si  $s \in \partial f(x^*)$  entonces

$$f(x) \geq f(x^*) + \langle s, x - x^* \rangle, \quad \forall x \in C$$

y de la hipótesis se concluye que  $f(x) \geq f(x^*)$  para toda  $x \in C$  entonces  $x^*$  es un minimizador global.

( $\Rightarrow$ )

Supongamos ahora que  $x^*$  es un mínimo global; definamos los conjuntos

$$A = \{(d, t) \in \mathbb{R}^{n+1} : f(x^* + d) < t + f(x^*)\}$$

$$B = \{(d, t) \in \mathbb{R}^{n+1} : x^* + d \in S, t \leq 0\}$$

Claramente  $A$  y  $B$  son no vacíos; veamos que  $A$  es convexo. Sean  $(d_1, t_1), (d_2, t_2) \in A$  y  $\alpha, \beta \geq 0$  con  $\alpha + \beta = 1$  entonces se tiene que :

$$f(x^* + d_1) < t_1 + f(x^*)$$

$$f(x^* + d_2) < t_2 + f(x^*)$$

tenemos que:

$$\begin{aligned} f(x^* + d_1\alpha + d_2\beta) &\leq f(\alpha x^* + \beta x^* + d_1\alpha + d_2\beta) = f(\alpha(x^* + d_1) + \beta(x^* + d_2)) \\ &\leq \alpha f(x^* + d_1) + \beta f(x^* + d_2) < \alpha t_1 + \beta t_2 + f(x^*) \end{aligned}$$

luego  $A$  es convexo. Análogamente para  $B$ .

Además como  $x^*$  es mínimo, entonces  $A \cap B = \emptyset$  entonces existe un hiperplano  $H_{(a,b)}^c = \{(d, t) \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle a, d \rangle + bt = c\}$  con  $(a, b) \neq 0$  tal que:

$$(d, t) \in A \rightarrow \langle a, d \rangle + bt \leq c \quad (10)$$

$$(d, t) \in B \rightarrow \langle a, d \rangle + bt \geq c \quad (11)$$

en (10) tomamos  $(0, 1/n) \in A$  y en (11) a  $(0, -1/n) \in B$  y tomando el límite cuando  $n \rightarrow \infty$  deducimos que  $c = 0$ , tomando  $(0, t) \in A$ ,  $t > 0$  tenemos que  $bt \leq 0$  esto implica que  $b \leq 0$ . Sea  $(d, 0) \in B$  entonces tenemos que  $\langle a, d \rangle \geq 0$  siempre que  $x^* + d \in C$ . Ahora si tomamos  $d = x - x^*$  con  $x \in C$  resulta  $x^* + d \in C$  entonces se tiene que :

$$\langle a, x - x^* \rangle \geq 0 \quad \text{para todo } x \in C$$

Mostraremos que existe  $s \in \partial f(x^*)$  tal que  $\langle s, x - x^* \rangle \geq 0$  para toda  $x \in C$

Sabemos que  $b \leq 0$ . Si  $b = 0$  entonces tendríamos de (10) y (11) que  $\langle a, x - x^* \rangle = 0$  para toda  $x \in C$  entonces  $a \in \partial f(x^*)$ . Ahora si  $b < 0$ ; dividiendo la desigualdad (11) entre  $-b$  tenemos que :

$$\langle s, d \rangle - t \leq 0 \quad \forall \quad (d, t) \in A$$

donde  $s = -a/b$ . Ahora como  $x^*$  es mínimo entonces  $f(x^*) \leq f(x^* + d)$  para  $x^* + d \in C$  entonces para  $\epsilon > 0$ ; tomamos  $0 < t = \epsilon + f(x^* + d) - f(x^*)$  y  $d = x - x^*$  con  $x \in C$ , entonces  $(d, t) \in A$  luego se tiene que

$$\langle s, d \rangle - (\epsilon + f(x^* + d) - f(x^*)) \leq 0$$

Como  $d = x - x^*$  obtenemos:

$$\langle s, x - x^* \rangle - (\epsilon + f(x^* + x - x^*) - f(x^*)) \leq 0$$

para todo  $0 < \epsilon$  luego

$$f(x) \geq f(x^*) + \langle x - x^*, s \rangle$$

así  $s \in \partial f(x^*)$  luego como  $\langle a, x - x^* \rangle \geq 0$  para toda  $x \in C$  entonces  $\langle s, x - x^* \rangle \geq 0$  esto concluye la prueba.  $\square$

# CAPITULO III

## 3. Método del Subgradiente

### 3.1. Método del Subgradiente

Supongamos que  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una función convexa. Queremos resolver el problema convexo irrestricto (PCI):

$$PCI \quad f^* = \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

Si  $f$  es diferenciable el problema es equivalente a resolver  $\nabla f(x) = 0$  (Teorema 1.22), si está ecuación es difícil de resolver, puede usarse el método del gradiente, que se basa en el hecho de que si  $d = -\nabla f(\bar{x}) \neq 0$  entonces  $d$  es una dirección descendente en  $\bar{x}$  esto es:

$$f(\bar{x} + \epsilon d) < f(\bar{x})$$

para todo  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño.

Pero si  $f(x)$  es convexa, no necesariamente diferenciable, la condición  $\nabla f(x) = 0$ , no puede ser usada en general, además si  $\xi \in \partial f(\bar{x})$  entonces  $-\xi$  no es necesariamente una dirección descendente como muestran los siguientes ejemplos.

#### Ejemplo 3.1

Consideremos la función convexa  $f(x, y) = \alpha |x| + \beta |y|$  con  $\alpha, \beta > 0$  y  $\beta > \alpha$ , se tiene que  $(\alpha, \beta) \in \partial f(1, 0)$  en efecto :

$$\begin{aligned} \alpha |x| + \beta |y| &\geq \alpha x + \beta y = \alpha + \alpha x - \alpha + \beta y = f(1, 0) + \langle (\alpha, \beta), (x - 1, y) \rangle = \\ &f(1, 0) + \langle (\alpha, \beta), (x, y) - (1, 0) \rangle \end{aligned}$$

Veamos ahora que  $-(\alpha, \beta)$  no es una dirección de descenso. En efecto sea  $t > 0$  y sea  $u = (1, 0) - t(\alpha, \beta) = (1 - t\alpha, -t\beta)$  se tiene que  $f(u) = f(1 - t\alpha, -t\beta) = \alpha |1 - t\alpha| + \beta |-t\beta|$  luego:

$$\alpha |1 - t\alpha| \geq \alpha - \alpha |\alpha t| > \alpha - \beta^2 |t|$$

así  $f(u) > f(1, 0)$ .  $\square$

### Ejemplo 3.2

Consideremos la función convexa  $f(x, y) = |x| + 2|y|$  y sea  $u = (1, 0)$ , calculemos  $\partial f(u)$  para esto vemos que:  $f(x, y) = \max \{x + 2y, -x + 2y, x - 2y, -x - 2y\}$  en el punto  $(1, 0)$  las condiciones activas se dan en la primera y tercera función componente cuyos gradientes son  $(1, 2)$  y  $(1, -2)$  así se tiene que  $\partial f(u) = \text{co} \{(1, 2), (1, -2)\}$  por el ejemplo anterior una dirección no descendente es  $-(1, 2)$ ; ver ( Figuras (16) y (17)).

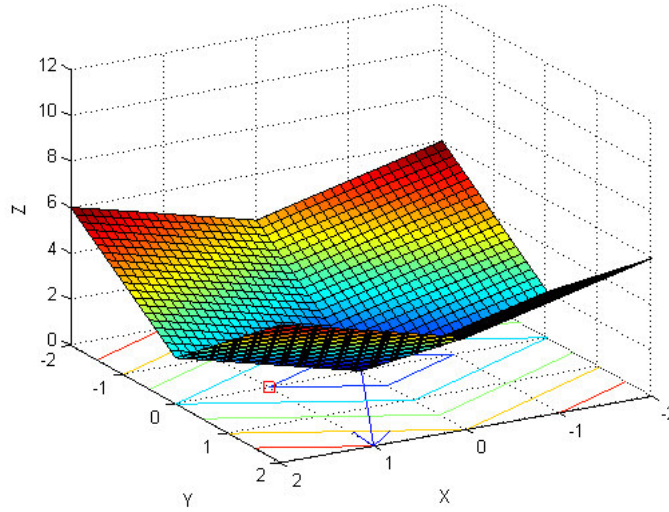


Figura 16: Gráfica de  $f(x, y) = |x| + 2|y|$

### Observación 3.1

Una observación importante en la cual se basa gran parte del método subgradiente es la siguiente: Sean  $u, \bar{u} \in \mathbb{R}^n$  tales que  $f(\bar{u}) \leq f(u)$  y sea  $s \in \partial f(u)$  entonces se tiene  $f(z) \geq f(u) + \langle s, z - u \rangle$ , para toda  $z \in \mathbb{R}^n$  tomando  $z = \bar{u}$  tenemos  $f(\bar{u}) \geq f(u) + \langle s, \bar{u} - u \rangle$  entonces se tiene que  $\langle s, \bar{u} - u \rangle \leq 0$ , ahora si  $u^*$  es el punto óptimo, entonces en particular tenemos que:

$$\langle s, u^* - u \rangle \leq 0$$

esto nos dice que el subgradiente forma un ángulo obtuso con la dirección  $u^* - u$  entonces  $-s$  forma un ángulo agudo con la dirección  $u^* - u$ , ver Figura (18).

Así tomando un paso suficientemente pequeño  $l > 0$ , el vector  $w = u - ls$  está más próximo a  $u^*$ , esto es, existe un  $\hat{l} > 0$  tal que si  $0 < l < \hat{l}$  entonces  $\|w - u^*\| < \|u - u^*\|$ , un valor de  $\hat{l}$  para el cual esto ocurre se puede obtener conociendo el valor óptimo  $f^*$ , en efecto:

$$\|w - u^*\|^2 = \|u - ls - u^*\|^2 = \|u - u^*\|^2 - 2l \langle u - u^*, s \rangle + l^2 \|s\|^2$$

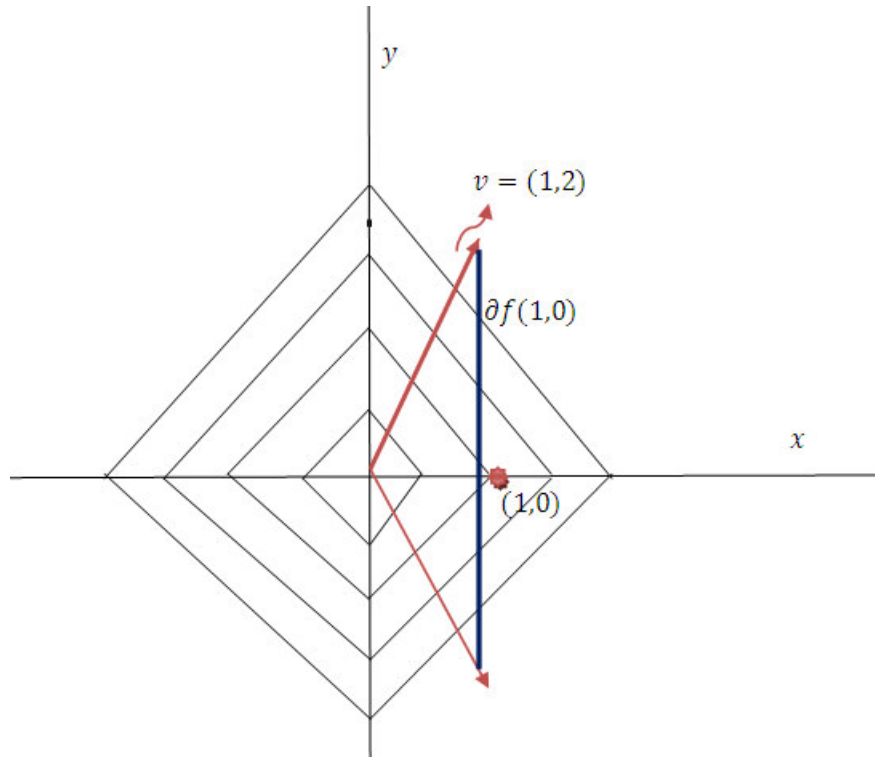


Figura 17:  $v \in \partial f(1,0)$ , pero  $-v$  no es una dirección de descenso.

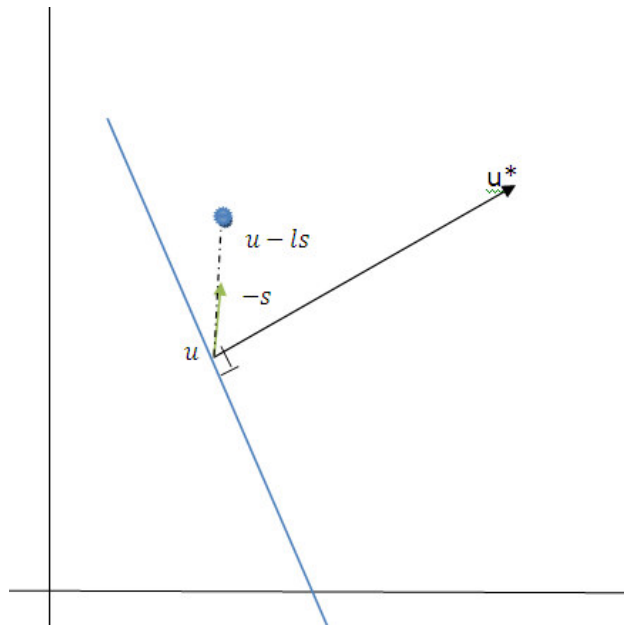


Figura 18: El subgradiente forma un ángulo obtuso con la dirección hacia el optimal

entonces

$$\|w - u^*\| \leq \|u - u^*\| \Leftrightarrow l \leq 2 \frac{\langle u - u^*, s \rangle}{\|s\|^2}$$

como  $0 < \frac{(f(u) - f^*)}{\|s\|^2} \leq \frac{\langle u - u^*, s \rangle}{\|s\|^2}$  entonces puede elegirse  $\hat{l} = \frac{2(f(u) - f^*)}{\|s\|^2}$ .  $\square$

### Método subgradiente

El método de optimización subgradiente es un procedimiento iterativo que puede ser usado para resolver el problema de maximizar (minimizar) una función cóncava (convexa) no necesariamente diferenciable. En analogía con el clásico método del Gradiente para funciones diferenciables, se define del método sugradiente para el caso convexo por:

#### Algoritmo del subgradiente

##### Paso 1

Iniciamos con un punto  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  y elegimos una sucesión de pasos dados por números positivos  $(l_k)_{k=0}^\infty$ .

##### Paso 2

Construimos la sucesión  $x_{k+1} = x_k - l_k s_k$ , con  $s_k \in \partial f(x_k)$ , que eventualmente converge a la solución óptima del problema PCI .

Calculamos un subgradiente  $s_{k+1} \in \partial f(x_{k+1})$ , si  $s_{k+1} = 0$  paramos,  $x_{k+1}$  es el punto óptimo. Caso contrario.

##### Paso 3

Proseguimos con el paso 2 hasta cumplirse una condición de parada establecida.

### Observación 3.2

Una de las dificultades del método subgradiente es establecer un criterio de parada.

En métodos de optimización diferenciable un criterio usual de parada es: dado  $\epsilon > 0$ , parar una vez hallado un  $x_k$  tal que  $\|\nabla f(x_k)\| < \epsilon$ , este criterio esta respaldado por la continuidad del gradiente  $\nabla f(x)$ , pero en optimización no diferenciable este criterio no siempre es útil. Considere por ejemplo la función  $f(x) = |x|$  entonces por más próximo que  $x_k$  está del punto óptimo  $x^* = 0$  siempre se tendra  $|f'(x_k)| = 1$ .

Los subgradienets encontrados en cada iteración son en general arbitrarios, es por eso que no contienen información sobre la condición de optimalidad del punto, encontrar que  $0 \in \partial f(x_k)$  puede tornarse inviable, pues en la mayoría de casos es complicado hallar el subdiferencial  $\partial f(x_k)$ .

Otro gran inconveniente en estos métodos es la baja velocidad de convergencia, esto es debido a que un subgradiente no es en general una dirección de descenso como se mostró, así el proceso de aproximación es, por lo general, bastante lento. Este fenómeno será estudiado y mejorado más adelante.

De la definición de  $(x_k)$ , es de esperarse que el método del subgradiente dependa fundamentalmente de la sucesión de tamaños de paso  $(l_k)$  elegida.

En el método del gradiente, el tamaño de paso se determina usualmente con las reglas de búsqueda lineal exacta e inexacta entre estas las de Armijo y Wolfe. La búsqueda lineal exacta se basa en el conocimiento de una dirección de descenso  $d_k$  en la iteración  $x_k$  del método;



para el método del subgradiente en la iteración  $x_k$  el subgradiente  $s_k$  no es necesariamente una dirección de descenso, así en caso exista  $t_k = \operatorname{argmin}_{t>0} f(x_k - ts_k)$  puede ocurrir que  $f(x_k - t_k s_k) > f(x_k)$ .

Para el Ejemplo 3.2 se tiene:  $0 = \operatorname{argmin}_{t \geq 0} f((1,0) - t(1,2))$  y  $1 = f(1,0) < f((1,0) - t(1,2))$  para toda  $t > 0$ .

Una posible extensión de la regla de Armijo para el caso de una función convexa no necesariamente diferenciable sería: Hallar  $t > 0$  tal que  $f(x_k - ts_k) \leq f(x_k) + \sigma t \langle s, -s \rangle$  para algún  $\sigma \in \langle 0, 1 \rangle$  y  $s \in \partial f(x_k)$  luego tomar  $t_k = t$ ; evidentemente el cumplimiento de esta condición conduciría a  $f(x_k - ts_k) < f(x_k)$ ; más esta condición aplicada al Ejemplo 3.2 tomando  $x_k = (1,0)$  y  $s = (1,2)$  no se verifica para ningún  $t > 0$ ; esto se deduce de inmediato de  $f(1,0) < f((1,0) - t(1,2))$  para toda  $t > 0$ .  $\square$

### Elección de los tamaños de paso

Es fundamental una adecuada elección de la sucesión de tamaños de paso  $(l_k)$ , si se eligieran los pasos muy pequeños entonces  $x_k$  se aproximaría lentamente al óptimo, por el contrario si los pasos fueran muy largos, la sucesión generada tiende a oscilar en torno al óptimo.

De la observación anterior, la búsqueda lineal exacta para el método del Gradiente, se pueden tornar inviable en el caso de funciones convexas no necesariamente diferenciables. En el caso de búsqueda lineal inexacta para el método del gradiente existen algunos pasos que son fijados al inicio del algoritmo, estos pasos pueden ser adaptados con resultados similares de aproximación y convergencia para el método subgradiente. Entre los mas usados tenemos:

1. Tamaño de paso fijo:  $l_i = l, l > 0$ .
2. Longitud de paso fijo:  $l_i = \frac{l}{\|s_i\|}, l > 0$ .
3. Tamaño de paso disminuyente :

$$l_i \rightarrow 0 \quad , \quad \sum_{i=0}^{\infty} l_i = \infty.$$

4. Tamaño de paso disminuyente normalizado:  $l_i = \frac{\gamma_i}{\|s_i\|}$  donde:

$$\gamma_i \rightarrow 0 \quad , \quad \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i = \infty.$$

5. Tamaño de paso de cuadrado sumable, pero no sumable:

$$l_i > 0 \quad , \quad \sum_{i=0}^{\infty} l_i = \infty \quad , \quad \sum_{i=0}^{\infty} l_i^2 < \infty.$$

Como un ejemplo de este tipo de pasos entre los mas usados tenemos  $l_i = \frac{a}{i+1}$  con  $a > 0$ .

6. Tamaño de paso de cuadrado sumable, pero no sumable, normalizado:

$$l_i = \frac{\gamma_i}{\|s_i\|},$$

$$\gamma_i > 0, \quad \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i = \infty, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i^2 < \infty.$$

7. Tamaño de paso optimal de Polyac (suponiendo conocido el valor óptimo):

$$l_i = \theta_i \frac{f(x_i) - f^*}{\|s_i\|^2}, \quad 0 < c_1 \leq \theta_i \leq c_2 < 2.$$

### Observación 3.3

La elección del paso 1 es sugerida por su uso en el método del gradiente ver [13], el paso 2,3 y 4 es estudiado por N.Z.Shor(ver [12] ) donde el paso 3 es motivado por la Observacion 3.5; el paso 6 se deduce de las pruebas de convergencia de los pasos dados en 4; y 5 se obtiene de 6, el paso 7 es sugerido por la Observacion 3.1.

### Resultados de convergencia y aproximación del método subgradiente

Los teoremas siguientes muestran el comportamiento del método subgradiente para los diferentes pasos mencionados anteriormente.

En lo sucesivo asumiremos que  $f$  es una función convexa no necesariamente diferenciable y que el conjunto optimal  $X^*$  del problema PCI es no vacío, en este caso es inmediato verificar que  $X^*$  es convexo y cerrado.

Lo que hace operar al método subgradiente es la propiedad que en cada iteración del método o disminuye el valor de función o decrece la distancia hacia el conjunto óptimo. Esta propiedad tiene sus bases en el siguiente lema, y da la base para el análisis del método.

**Lema 3.1** *Sea  $y \in \mathbb{R}^n$  fijo arbitrario, entonces para el método del subgradiente aplicado al PCI con cualquier sucesión de pasos  $(l_k)$  elegida, se tiene para toda  $k = 0, 1, ..$*

$$\|x_{k+1} - y\|^2 \leq \|x_k - y\|^2 - 2l_k(f(x_k) - f(y)) + l_k^2 \|s_k\|^2$$

### Prueba

Se tiene que:

$$\|x_{k+1} - y\|^2 = \|x_k - l_k s_k - y\|^2 = \|x_k - y\|^2 - 2l_k \langle s_k, x_k - y \rangle + l_k^2 \|s_k\|^2$$

de la convexidad de  $f$  se tiene que:

$$f(x_k) - f(y) \leq \langle s_k, x_k - y \rangle$$

de donde el resultado es inmediato.  $\square$

**Teorema 3.1** Consideremos el problema PCI. Sean  $X^*$  el conjunto optimal,  $(x_k)$  la sucesión generada por el método del subgradiente con los pasos dados por el ítem 1 (pag.64), y asumamos que  $\|s_k\| \leq L$  para toda  $k = 0, 1, \dots$ , entonces:

$$\liminf_{k \rightarrow +\infty} f(x_k) \leq f^* + \frac{lL^2}{2}$$

### Prueba

Supongamos que la desigualdad no sea cierta entonces existe  $\epsilon > 0$  tal que

$$f(x_k) \geq f^* + \frac{lL^2}{2} + 2\epsilon \quad \text{para toda } k = 0, 1, \dots$$

Como  $f$  es continua existe  $\hat{y} \in \mathbb{R}^n$  tal que  $f(\hat{y}) = f^* + \epsilon$ , así

$$f(x_k) - f(\hat{y}) \geq \frac{lL^2}{2} + \epsilon \quad \text{para toda } k = 0, 1, \dots$$

Usando el lema anterior con  $l_k = l$  y  $y = \hat{y}$  y la acotación de los subgradientes se obtiene para  $k = 0, 1, \dots$

$$\|x_{k+1} - \hat{y}\|^2 = \|x_k - \hat{y}\|^2 - 2l\left(\frac{lL^2}{2} + \epsilon\right) + l^2L^2 = \|x_k - \hat{y}\|^2 - 2l\epsilon$$

tomando sumatoria sobre  $k$  obtenemos

$$\|x_k - \hat{y}\|^2 \leq \|x_0 - \hat{y}\|^2 - 2kl\epsilon$$

Haciendo  $k \rightarrow +\infty$  se obtiene una contradicción, esto prueba el teorema.  $\square$

El teorema siguiente es debido a N.Z.Shor (Ver [12]).

**Teorema 3.2** Consideremos el problema PCI. Sean  $X^*$  el conjunto optimal,  $(x_k)$  la sucesión generada por el método del subgradiente con los pasos dados por el ítem 2 (pag.64), entonces para cualesquiera  $\epsilon > 0$ ,  $x^* \in X^*$  podemos hallar  $k^* \in \mathbb{Z}_0^+$  y  $\bar{x}$ , tales que

$$f(x_{k^*}) = f(\bar{x}) \quad y \quad \|\bar{x} - x^*\| < \frac{l(1 + \epsilon)}{2}$$

### Prueba

Sean  $\epsilon > 0$ ,  $x^* \in X^*$  arbitrarios fijos. Si  $x_k$  es un punto en la iteración  $k$  con  $s_k = 0$  entonces tomamos  $k^* = k$ ,  $\bar{x} = x^*$ . Ahora, si  $s_k \neq 0$  para todo  $k = 0, 1, \dots$ , sea  $z_k^* = x_k - x^*$  entonces tenemos:

$$\|z_{k+1}^*\|^2 = \left\| z_k^* - \frac{ls_k}{\|s_k\|} \right\|^2 = \|z_k^*\|^2 + l^2 - 2l \frac{\langle z_k^*, s_k \rangle}{\|s_k\|}$$

Denotemos con  $a_k^* = \frac{\langle z_k^*, s_k \rangle}{\|s_k\|} \geq 0$  la distancia de  $x^*$  al hiperplano soporte  $L_k = \{x : \langle s_k, x - x_k \rangle = 0\}$ , definimos  $U_k = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = f(x_k)\}$  y sea  $b_k^* = \min_{x \in U_k} \|x - x^*\|$ , como  $U_k$  es cerrado y  $x^* \notin U_k$  entonces  $b_k^* > 0$ . De la desigualdad  $f(x) \geq f(x_k) + \langle s_k, x - x_k \rangle$  se deduce que si  $x \in U_k$  entonces  $\langle s_k, x - x_k \rangle \leq 0$ , además  $\langle s_k, x^* - x_k \rangle \leq 0$  así  $U_k$  y  $x^*$  yacen en un mismo lado de  $L_k$ , además todo segmento que une  $x^*$  con  $L_k$  pasa a travez de  $U_k$ , para ver esto basta definir la función  $g(t) = f(x^*t + (1-t)x_L) - f(x_k)$  donde  $x_L$  es un punto cualquiera en  $L_k$ , y aplicar el teorema del valor intermedio para funciones continuas en  $[0, 1]$ , de esto se desprende que  $a_k^* \geq b_k^*$  de donde obtenemos:

$$\|z_{k+1}^*\|^2 \leq \|z_k^*\|^2 - 2l(b_k^* - \frac{l}{2}) \quad (12)$$

Si  $b_k^* \geq \frac{l}{2}(1+\epsilon)$  para toda  $k = 0, 1, 2, \dots$  entonces tenemos que  $\|z_{k+1}^*\|^2 \leq \|z_k^*\|^2 - \epsilon l^2$  de esto se desprende por inducción que  $\|z_{k+1}^*\|^2 \leq \|x_0 - x^*\|^2 - \epsilon(k+1)l^2$  para toda  $k = 0, 1, 2, \dots$  lo cual es absurdo, así existe un  $k^*$  y  $\bar{x} \in U_{k^*}$  tal que  $b_{k^*}^* = \|\bar{x} - x^*\| = \min_{x \in U_{k^*}} \|x - x^*\| < \frac{l}{2}(1+\epsilon)$  esto completa la prueba.  $\square$

### Observación 3.4

El Teorema 3.2 no garantiza la convergencia del método subgradiente, solo asegura hallar un punto  $\bar{x} \in B(x^*, r)$  con  $r \geq \frac{l}{2}$ , cuyo valor coincide con la de un término de la sucesión  $(x_k)$ . Del Teorema 3.2 se deducen los siguientes resultados.

**Colorario 3.1** *Bajo las condiciones del Teorema 3.2, para todo  $\delta > 0$  existe un  $l(\delta) > 0$  tal que el método del subgradiente con paso dado por  $l_k = \frac{l(\delta)}{\|s_k\|}$  satisface :  $x_k \in X^*$  para algún  $k$  o existe una subsucesión  $(x_{k_i})$  de  $(x_k)$  tal que  $f(x_{k_i}) - f^* < \delta$ .*

### Prueba

Por la continuidad, dado  $\delta > 0$  existe un  $\gamma > 0$  tal que  $\|x - x^*\| < \gamma$ , entonces  $|f(x) - f^*| < \delta$ . Sea  $l(\delta) < \gamma$ , y generemos la sucesión por el método del subgradiente dada por  $x_{k+1} = x_k - \frac{l(\delta)}{\|s_k\|} s_k$ . Ahora para cada  $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{1}{n_0} < \gamma$  por el teorema anterior existen  $k_n$  y  $\bar{x}_n$  con  $f(\bar{x}_n) = f(x_{k_n})$  y  $\|\bar{x}_n - x^*\| < \frac{l(\delta)}{2}(1 + \frac{1}{n}) < l(\delta) < \gamma$  entonces  $f(x_{k_n}) - f^* < \delta$ .  $\square$

**Colorario 3.2** *Si el conjunto  $X^*$  de puntos mínimos de la función  $f$  contiene una esfera de radio  $r$  con  $r > \frac{l}{2} > 0$  y aplicamos el método del subgradiente con los pasos dados en el item 2 entonces existe un  $x_k \in X^*$  para algún  $k$ .*

### Prueba

Se deduce de inmediato del Teorema 3.2.  $\square$

### Ejemplo 3.3

Considere la función convexa dada por

$$f(x) = \begin{cases} -2x & x \in (-\infty, -\frac{1}{2}] \\ 1 & x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ 2x & x \in (\frac{1}{2}, +\infty) \end{cases}$$

entonces para cualquier  $0 < l < \frac{1}{2}$  existe algún  $k$  tal  $x_k \in X^*$ .

### Observación 3.5

Puede verse del Corolario 3.1 que usando el método subgradiente con longitud de paso constante cada vez más pequeño, podemos movernos sobre cualquier conjunto de nivel de la forma  $L(c) = \{x : f(x) \leq f^* + c, c > 0\}$ .

Para obtener un resultado de convergencia consideraremos los pasos dados por  $l_i = \frac{\gamma_i}{\|s_i\|}$ , intuitivamente se debería imponer la condición de que  $(\gamma_i)$  converja a 0, pero la disminución de estos tamaños de paso no debería ser muy rápido, en particular si la serie converge  $\sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i = \gamma$  entonces es fácil ver que la sucesión  $(x_k)$  dada por  $x_{k+1} = x_k - l_k s_k$  posee límite, pero este límite no necesariamente está en el conjunto  $X^*$ , en efecto:

$$\begin{aligned} \|x_k - x_0\| &= \|x_k - x_{k-1} + x_{k-1} - x_0\| \leq \|x_k - x_{k-1}\| + \|x_{k-1} - x_0\| = \|x_k - x_{k-1}\| \\ &\quad + \|x_{k-1} - x_{k-2} + x_{k-2} - x_0\| \leq \|x_k - x_{k-1}\| + \|x_{k-1} - x_{k-2}\| + \|x_{k-2} - x_0\| \\ &\leq \|x_k - x_{k-1}\| + \|x_{k-1} - x_{k-2}\| + \dots + \|x_2 - x_1\| + \|x_1 - x_0\| \end{aligned}$$

y puesto que  $\|x_{k+1} - x_k\| = \gamma_k$  entonces se tiene:  $\|x_k - x_0\| \leq \sum_{i=0}^k \gamma_i$  luego  $\|x_k - x_0\| \leq \gamma$ , así el punto límite tendría que estar en  $B[x_0, \gamma]$ , lo cual puede no ocurrir, por ejemplo considere nuevamente la función  $f(x) = |x|$  entonces  $x^* = 0$  si elegimos los pasos dados por  $\gamma_k = \frac{1}{2k(k+1)}$  y tomando  $x_0 = 1$  se tiene  $\|x_k - 1\| \leq \frac{1}{2}$ , así  $(x_k)$  no converge a  $x^*$ .  $\square$

Para suavizar esta condición Shor impone la restricción  $\sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i = \infty$ . Los dos teoremas siguientes usan estos pasos.

**Teorema 3.3** *Consideremos el PCI; con conjunto optimal  $X^*$  acotado, eligiendo los pasos dados por el ítem 4 (pag 64),  $l_k = \frac{\gamma_k}{\|s_k\|}$  donde*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_k = 0 \quad y \quad \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k = \infty$$

entonces para todo  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , la sucesión generada por el método del subgradiente satisface: existe un índice  $\bar{k}$  tal que  $x_{\bar{k}} \in X^*$  o

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \min_{y \in X^*} \|x_k - y\| = 0 \quad y \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = f^*$$

## Prueba

Sea  $x^* \in X^*$  fijo arbitrario. Si  $x_k \notin X^*$  entonces por (12) se tiene que

$$\|z_{k+1}^*\|^2 \leq \|z_k^*\|^2 - 2\gamma_k b_k^* + \gamma_k^2 \quad (13)$$

Sea  $a > 0$  fijo consideremos el conjunto  $U^a = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq f^* + a\}$  el cual es no vacío, convexo y cerrado, sea  $\partial U^a$  su frontera el cual es compacta, por hipótesis  $X^*$  es compacto. Nótese que  $X^* \subseteq U^a$ , utilizando la continuidad de  $f$  es fácil ver que  $\partial U^a \cap X^* = \emptyset$ , sea:

$$b(a) = \min_{x \in \partial U^a, y \in X^*} \|x - y\| > 0$$

definamos también

$$d(a) = \max_{x \in \partial U^a} \min_{y \in X^*} \|y - x\|$$

como  $\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_k = 0$  entonces tomando  $b(a) > 0$  existe un  $N_a \in \mathbb{N}$  tal que  $\gamma_k \leq b(a)$  para toda  $k \geq N_a$ . Si  $f(x_k) > f^* + a$  para toda  $k \geq N_a$  se tiene que  $U_k \subseteq C(U^a)$  entonces se tiene  $b(a) \leq b_k^*$  y así de (13) obtenemos:

$$\|x_k - x^*\|^2 - \|x_{k+1} - x^*\|^2 \geq b(a)\gamma_k \quad (14)$$

entonces por inducción tenemos:

$$\sum_{i=N_a}^k \gamma_i b(a) \leq \|x_{N_a} - x^*\|^2$$

lo cual es absurdo pues  $\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k = \infty$ , luego debe de existir  $N_a^1 > N_a$  tal que  $f(x_{N_a^1}) \leq f^* + a$ . Sea  $k > N_a^1$ , si  $f(x_k) \leq f^* + a$  entonces  $U_k \subseteq U^a$  luego  $\min_{y \in X^*} \|y - x_k\| \leq d(a)$ , de la desigualdad triangular tenemos  $\|y - x_{k+1}\| \leq \|y - x_k\| + \gamma_k$  entonces  $\min_{y \in X^*} \|y - x_{k+1}\| \leq d(a) + \gamma_k$ . Por otra parte si  $f(x_k) > f^* + a$  entonces por (14) se tiene  $\min_{y \in X^*} \|y - x_{k+1}\| \leq \min_{y \in X^*} \|y - x_k\|$ , así, en cualquiera de los casos, para  $k > N_a^1$  se tiene

$$\min_{y \in X^*} \|y - x_k\| \leq d(a) + \gamma(N_a^1)$$

donde  $\gamma(N_a^1) = \max_{k \geq N_a^1} \gamma_k$ , de la definición de  $d(a)$  se tiene que  $d(a) \rightarrow 0$  si  $a \rightarrow 0$ . Sea  $\epsilon > 0$  entonces existe  $a(\epsilon) > 0$  tal que  $d(a(\epsilon)) \leq \frac{\epsilon}{2}$ , para este  $a(\epsilon)$  podemos hallar un  $N(\epsilon)$  tal que  $\min_{y \in X^*} \|y - x_k\| \leq d(a) + \gamma(N(\epsilon))$  y  $\gamma_k \leq \frac{\epsilon}{2}$  para  $k \geq N(\epsilon)$ , así para toda  $k > N(\epsilon)$  se tiene:

$$\min_{y \in X^*} \|y - x_k\| \leq \epsilon$$

esto prueba la primera parte del teorema. De la continuidad de  $f$  se sigue que  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f^*$ .

□

### Observación 3.6

El teorema anterior no asegura que  $x_k \rightarrow x^*$ .  $\square$

En el caso de no tener el conjunto optimal acotado, solo se garantiza la existencia de una subsucesión de  $(f(x_k))$  que converge a  $f^*$ ; tenemos el siguiente resultado.

**Teorema 3.4** *Consideremos el PCI. Sea  $(x_k)$  las sucesión de iteraciones generadas por el método del subgradiente, tomando los pasos dados por el teorema anterior se tiene:*

$$f^* = \inf_k f(x_k).$$

### Prueba

Supongamos que el resultado es falso entonces  $f^* < \inf_k f(x_k) \leq f(x_k)$  para  $k = 0, 1, \dots$  entonces existe  $0 < \epsilon$  tal que  $f^* + \epsilon < f(x_k)$  para  $k = 0, 1, \dots$ . Sea

$$T = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < f^* + \epsilon\}.$$

Como  $f$  es continua,  $T$  es abierto y no vacío pues  $X^* \subseteq T$ , entonces existen  $\hat{x}$  y  $\rho > 0$  tales que  $B[\hat{x}, \rho] \subseteq T$ , sea  $s_k \in \partial f(x_k)$  elegido en la iteración  $k$  por el método del subgradiente, para  $k = 0, 1, \dots$  tenemos:

$$f(x_k) \geq f^* + \epsilon \geq f\left(\hat{x} + \frac{\rho s_k}{\|s_k\|}\right) \geq f(x_k) + \left\langle s_k, \hat{x} + \frac{\rho s_k}{\|s_k\|} - x_k \right\rangle$$

desarrollando obtenemos que:

$$\left\langle s_k, \hat{x} + \frac{\rho s_k}{\|s_k\|} - x_k \right\rangle \leq 0$$

$$\langle s_k, \hat{x} - x_k \rangle \leq -\rho \|s_k\|$$

también tenemos para cada  $k = 0, 1, \dots$

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - \hat{x}\|^2 &= \left\| x_k - l_k \frac{s_k}{\|s_k\|} - \hat{x} \right\|^2 = \|\hat{x} - x_k\|^2 + l_k^2 + \frac{2l_k \langle \hat{x} - x_k, s_k \rangle}{\|s_k\|} \\ &\leq \|\hat{x} - x_k\|^2 + l_k^2 - 2l_k \rho \end{aligned}$$

como  $\lim_{k \rightarrow \infty} l_k = 0$  entonces existe  $K \in \mathbb{N}$  tal que  $l_k \leq \rho$  para  $k \geq K$ , de esto se obtiene

$$\|x_{k+1} - \hat{x}\|^2 \leq \|x_k - \hat{x}\|^2 - \rho l_k, \quad \text{para } k \geq K \quad (15)$$

Afirmamos que:

$$\|x_{K+j} - \hat{x}\|^2 \leq \|x_K - \hat{x}\|^2 - \rho \sum_{k=K}^{K+j-1} l_k, \quad \text{para } j \geq 1$$

Si  $j = 1$  claramente es verdadero, supongamos válida para  $h = j$  y veamos su validez para  $h = j + 1$ . Tomando  $k = K + j$  en (15) tenemos :

$$\begin{aligned} \|x_{K+j+1} - \hat{x}\|^2 &\leq \|x_{K+j} - \hat{x}\|^2 - \rho l_{K+j} \leq \|x_K - \hat{x}\|^2 - \rho \sum_{k=K}^{K+j-1} l_k - \rho l_{K+j} \\ &= \|x_K - \hat{x}\|^2 - \rho \sum_{k=K}^{K+j} l_k \end{aligned}$$

si  $j$  toma valores sumamente grandes, el lado derecho de esta última desigualdad toma valores negativos y esto es una contradicción, esto termina la prueba.  $\square$

Podemos obtener también un resultado de convergencia, usando los pasos dados en ítem 3 (pag 64), bajo la condición adicional de tener los subgradiientes acotados.

**Teorema 3.5** *Consideremos el método iterativo del subgradiente tomando los tamaños de paso  $l_k$  dados en el ítem 3, con conjunto optimal  $X^*$  acotado, entonces:*

a)

Si  $\|s_k\| \leq c$  entonces para todo  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  se tiene

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \min_{y \in X^*} \|x_k - y\| = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f^*.$$

b)

Si  $(s_k)$  no es acotado entonces el algoritmo no es necesariamente convergente.

## Prueba

Veamos la parte a)

Si  $s_k = 0$  para algún  $k$  entonces  $x_k \in X^*$ . Supongamos que  $s_k \neq 0$  para toda  $k = 0, 1, \dots$  sea  $\hat{l}_k = l_k \|s_k\|$  como  $(s_k)$  es acotada entonces  $\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{l}_k = 0$ .

Si  $\sum_{k=0}^{\infty} \hat{l}_k = \infty$ , entonces escribiendo  $x_{k+1} = x_k - \hat{l}_k \frac{s_k}{\|s_k\|}$  y aplicando el Teorema 3.3 tenemos el resultado deseado.

Si  $\sum_{k=0}^{\infty} \hat{l}_k < +\infty$  entonces la sucesión  $(x_k)$  es convergente a un cierto  $\hat{x}$ . Veamos que  $\hat{x} \in X^*$ , suponga que esto no ocurre, entonces  $0 \notin \partial f(\hat{x})$ , por el Teorema 2.6, 0 no es punto límite de  $(s_k)$ , entonces existe  $m > 0$  tal que  $\|s_k\| \geq m > 0$ , para toda  $k = 0, 1, \dots$ , pero entonces  $\sum_{k=0}^{\infty} \hat{l}_k \geq m \sum_{k=0}^{\infty} l_k = \infty$ , y esto es una contradicción.

Para la parte b) consideremos por ejemplo la función convexa dada por  $f(x) = x^4$ ,  $l_k = \frac{1}{k+1}$  y  $x_0 = 1$ . Se tiene entonces que  $s_0 = 4$ ,  $x_1 = -3$ ,  $s_1 = -108$ ,  $x_2 = 35,667$ ,  $s_2 = 186623,234$  ..., de donde se observa que  $(x_k)$  no converge al punto óptimo  $x^* = 0$ .  $\square$



Para una función lineal por tramos con un número finito de tramos, por el Teorema 2.7 es fácil ver que  $(s_k)$  es acotado, luego se cumple la parte (a) del teorema.

### Observación 3.7

Podemos debilitar la hipótesis de acotación observando que dado  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  existe  $\delta > 0$  tal que si  $l_k \leq \delta$  para  $k \geq K$  entonces ocurre (a); en efecto, sea  $r > 0$  y consideremos los conjuntos  $U(r) = \{x : f(x) = f(x_0) + r\}$  y  $S(r) = \{x : f(x) \leq f(x_0) + r\}$  que son compactos puesto que  $f$  está definida en todo  $\mathbb{R}^n$  y  $X^*$  es acotado. Consideremos la bola cerrada mínima  $S^*$  con centro en  $x^* \in X^*$  que contiene a  $S(r)$  y definamos,  $c = \sup_{x \in S^*} \|s_x\|$ ,  $d_1 = d(U(\frac{r}{2}), U(r))$ ,  $d_2 = d(x^*, U(\frac{r}{2}))$ , sea  $\delta = \min \left\{ \frac{d_1}{c}, \frac{d_2}{c} \right\} > 0$ . Existe  $K \in \mathbb{N}$  tal que  $l_k \leq \delta$  para  $k \geq K$ , entonces  $l_k \|s_k\| \leq \min \{d_1, d_2\}$  siempre que  $x_k \in S^*$  y  $k \geq K$ . Vamos a probar que  $x_k \in S^*$  desde que  $x_0 \in S^*$ . En efecto si  $x_k \in S(r) \setminus S(\frac{r}{2})$  se tiene  $\frac{\langle s_k, x_k - x^* \rangle}{\|s_k\|} \geq d_2$ , ahora para  $k \geq K$ , tenemos  $-2 \frac{\langle s_k, x_k - x^* \rangle}{\|s_k\|} + l_k \|s_k\| \leq -2d_2 + d_2 = -d_2 < 0$  de donde se deduce que  $d(x_{k+1}, x^*) \leq d(x_k, x^*)$  luego  $x_{k+1} \in S^*$ , ahora si  $x_k \in S(\frac{r}{2})$  tenemos  $\|x_{k+1} - x_k\| \leq d_1$  entonces  $x_{k+1} \in S(r) \subseteq S^*$ , así  $x_k \in S^*$ , luego  $\{s_k\}$  es acotado y ocurre (a).  $\square$

Con esta observación el Teorema 3.5 es modificado como sigue.

**Teorema 3.6** *Consideremos el método iterativo del subgradiente tomando los pasos dados en el teorema anterior; para todo punto inicial  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  existe  $K(x_0) \in \mathbb{Z}_0^+$  tal que la sucesión  $(x_k)$  generada de acuerdo a la fórmula:*

$$x_{k+1} = \begin{cases} x_k - l_k s_k & k \geq K \\ x_0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

satisface :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \min_{y \in X^*} \|x_k - y\| = 0 \quad y \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f^*.$$

### Prueba

La demostración del teorema se basa en la Observación 3.7 y en el Teorema 3.5.  $\square$

La condición de tener los subgradiientes acotados no son necesarias si se usan los pasos dados en el ítem 6 (pag 65).

**Teorema 3.7** *Consideremos el PCI; para el método subgradiente con los pasos dados por el ítem 6 (pag. 65), se tiene que la sucesión generada  $(x_k)$  converge a un elemento de  $X^*$ .*

### Prueba

Sea  $x^* \in X^*$ , claramente  $f^* \leq f(x_k)$  para todo  $k = 0, 1, \dots$ , del Lema 3.1 tenemos:

$$\|x_{k+1} - x^*\|^2 \leq \|x_k - x^*\|^2 + \gamma_k^2 \quad (16)$$

Sea  $k_0$  un entero positivo fijo arbitrario, utilizando (16) para  $k \geq k_0$  tenemos :

$$\|x_{k+1} - x^*\|^2 \leq \|x_{k_0} - x^*\|^2 + \sum_{i=k_0}^k \gamma_i^2 \leq \|x_{k_0} - x^*\|^2 + \sum_{i=k_0}^{\infty} \gamma_i^2 < \infty$$

así obtenemos que  $(x_k)$  es acotada. Por Teorema 3.4, tenemos que existe una subcesión  $(x_{k_j})$  de  $(x_k)$  tal que  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{k_j}) = f(x^*) = f^*$ , usando la continuidad de la función  $f$  en  $\mathbb{R}^n$ , y puesto que  $(x_{k_j})$  es acotada entonces existe una subsucesión que la podemos representar de igual modo tal que  $x_{k_j} \rightarrow \hat{x}$  y entonces  $f(x^*) = f(\hat{x})$ , esto es  $\hat{x} \in X^*$ .

Tomando  $x^* = \hat{x}$  en el análisis expuesto líneas arriba para toda  $k_j$  tenemos:

$$\|x_k - \hat{x}\|^2 \leq \|x_{k_j} - \hat{x}\|^2 + \sum_{i=k_j}^{\infty} \gamma_i^2 \quad \forall k \geq k_j \quad (17)$$

de la hipótesis tenemos que

$$\lim_{k_j \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=k_j}^{\infty} \gamma_i^2 \right) = 0$$

así dado  $\delta > 0$  existe  $k_{j_0} \in \mathbb{N}$  tal que

$$\sum_{i=k_{j_0}}^{\infty} \gamma_i^2 < \frac{\delta^2}{8}$$

y

$$\|x_{k_j} - \hat{x}\|^2 < \frac{\delta^2}{8}$$

para todo  $k_j \geq k_{j_0}$ .

De (17) obtenemos

$$\|x_k - \hat{x}\| < \delta, \quad \text{para toda } k \geq k_{j_0}$$

así  $x_k \rightarrow \hat{x}$ , esto termina la prueba.  $\square$

**Teorema 3.8** *Consideremos el PCI; entonces para el método subgradiente con los pasos dados en el ítem 5 (pag 64), si  $\|s_k\| \leq M$  entonces se tiene que la sucesión generada por el método subgradiente  $(x_k)$ , converge a un elemento de  $X^*$ .*

### Prueba

La prueba es similar al teorema anterior puesto que del Lema 3.1 se obtiene  $\|x_{k+1} - x^*\|^2 \leq \|x_k - x^*\|^2 + l_k^2 M^2$ .  $\square$

El siguiente teorema muestra que si conocemos el valor óptimo podemos definir un intervalo para la elección de los pasos que hace que la sucesión  $(\|x_k - x^*\|)$  sea decreciente.

**Teorema 3.9** *Sea  $x^*$  una solución óptima del problema PCI. Si  $0 < l_k < 2 \frac{f(x_k) - f(x^*)}{\|s_k\|^2}$  entonces*

$$\|x_{k+1} - x^*\| < \|x_k - x^*\|, \quad k = 0, 1, \dots$$

### Prueba

Este resultado es inmediato de la Observación 3.1  $\square$

Se desprende del teorema anterior que la sucesión generada por el método subgradiente con los pasos dados por el teorema anterior, es Fejér convergente sobre  $X^*$ .

**Teorema 3.10** *Consideremos el PCI; para el método del subgradiente  $x_{k+1} = x_k - l_k s_k$  y los pasos dados por el ítem 7 (pag. 65) i.e  $l_k = \theta_k \frac{f(x_k) - f^*}{\|s_k\|^2}$ , donde  $0 < c_1 \leq \theta_k \leq c_2 < 2$  se tiene:*

$$f(x_k) \rightarrow f^* \quad y \quad (x_k) \quad \text{converge a un punto de } X^*$$

### Prueba

Sea  $x^* \in X^*$  fijo arbitrario y  $\|x_0 - x^*\| \leq R$ , tenemos que:

$$\|x_{k+1} - x^*\|^2 = \|x_k - l_k s_k - x^*\|^2 = \|x_k - x^*\|^2 - 2l_k \langle s_k, x_k - x^* \rangle + l_k^2 \|s_k\|^2$$

utilizando la desigualdad  $f(x^*) \geq f(x_k) + \langle s_k, x^* - x_k \rangle$  se tiene

$$l_k 2(f(x_k) - f^*) \leq \|x_k - x^*\|^2 + l_k^2 \|s_k\|^2 - \|x_{k+1} - x^*\|^2 \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots$$

utilizando esta última desigualdad para  $k = 0, \dots, n$  y luego sumando obtenemos:

$$2 \sum_{i=0}^n l_i (f(x_i) - f^*) \leq \sum_{i=0}^n \|x_i - x^*\|^2 + \sum_{i=0}^n l_i^2 \|s_i\|^2 - \sum_{i=0}^n \|x_{i+1} - x^*\|^2$$

resulta

$$2 \sum_{i=0}^n l_i (f(x_i) - f^*) \leq \|x_0 - x^*\|^2 + \sum_{i=0}^n l_i^2 \|s_i\|^2$$

$$2 \sum_{i=0}^n \theta_i \frac{(f(x_i) - f^*)^2}{\|s_i\|^2} \leq R^2 + \sum_{i=0}^n \theta_i^2 \frac{(f(x_i) - f^*)^2}{\|s_i\|^2}$$

así

$$\sum_{i=0}^n (2\theta_i - \theta_i^2) \frac{(f(x_i) - f^*)^2}{\|s_i\|^2} \leq R^2$$

por el Teorema 3.9 es inmediato ver la sucesión  $(x_k)$  es Fejér convergente sobre  $X^*$ , así  $(x_k)$  es acotada, entonces por el Teorema 2.6 se tiene que  $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \partial f(x_k)$  es acotada entonces existe  $G$  tal que  $\|s_k\| \leq G$  para toda  $k = 0, 1, \dots$ , por otra parte es fácil probar que  $0 < p \leq 2\theta_i - \theta_i^2 \leq 1$  para algún  $p > 0$  y para toda  $i = 0, 1, \dots$ , así se tiene que:

$$\sum_{i=0}^n (f(x_i) - f^*)^2 \leq \frac{R^2 G^2}{p}$$

así se concluye que  $f(x_i) \rightarrow f^*$ .

Como  $(x_k)$  es acotada entonces tiene un punto de acumulación  $\hat{x}$ , luego existe una subsucesión  $(x_{k_j})$  tal que  $x_{k_j} \rightarrow \hat{x}$  por la continuidad de  $f$  se tiene que  $\hat{x} \in X^*$ , luego por el Teorema 1.12, tenemos que  $x_k \rightarrow \hat{x} \in X^*$ , esto concluye la prueba.  $\square$

El siguiente teorema muestra una extensión del método del subgradiente, en el que se sustituye un subgradiente por un  $\epsilon$ -subgradiente.

**Teorema 3.11** *Consideremos el PCI; sea el método iterativo dado por  $x_{k+1} = x_k - l_k s_k$  donde  $s_k \in \partial_{\epsilon_k} f(x_k)$  y las sucesiones  $(\epsilon_k)$ ,  $(l_k)$  y  $(s_k)$  satisfacen las siguientes condiciones:*

$$\sum_{k=0}^{\infty} l_k = \infty, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \epsilon_k = 0, \quad y \quad \lim_{k \rightarrow \infty} l_k \|s_k\|^2 = 0$$

Entonces, se tiene que  $\liminf_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f^*$

**Prueba:**

Sea  $x^* \in X^*$  se tiene que:

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - x^*\|^2 &= \|x_{k+1} - x_k\|^2 + \|x_k - x^*\|^2 + 2 \langle x_{k+1} - x_k, x_k - x^* \rangle \\ &= \|x_k - x^*\|^2 + 2l_k \langle s_k, x^* - x_k \rangle + l_k^2 \|s_k\|^2 \\ &\leq \|x_k - x^*\|^2 + 2l_k(f^* - f(x_k) + \epsilon_k) + l_k^2 \|s_k\|^2 \end{aligned}$$

Supongamos que la afirmación no sea verdadera, entonces  $\liminf_{k \rightarrow \infty} f(x_k) > f^*$  luego existe  $\delta > 0$  y  $k_1 \in \mathbb{N}$  tal que

$$f^* < f(x_k) - \delta \quad \forall k \geq k_1$$

de las hipótesis se deduce que existe un  $k_2 \in \mathbb{N}$  tal que:

$$l_k \|s_k\|^2 + 2\epsilon_k \leq \delta \quad \forall k \geq k_2$$

utilizando las dos últimas desigualdades tenemos:

$$\|x_{k+1} - x^*\|^2 \leq \|x_k - x^*\|^2 + l_k (2\epsilon_k + l_k \|s_k\|^2 - 2\delta) \leq \|x_k - x^*\|^2 - \delta l_k$$

$\forall k \geq k_0 = \max\{k_1, k_2\}$ ; tomando suma para  $k \geq k_0$  tenemos:

$$\delta \sum_{j=k_0}^k l_j \leq \sum_{j=k_0}^k (\|x_j - x^*\|^2 - \|x_{j+1} - x^*\|^2) \leq \|x_{k_0} - x^*\|^2$$

tomando límite cuando  $k \rightarrow \infty$  llegamos a una contradicción, esto prueba el teorema.  $\square$

Es inmediato ver que si se consideran los pasos dados en el ítem 3, así como los subgradientes acotados entonces se obtiene el mismo resultado.

### 3.1.1. Aplicaciones y ejemplos numéricos

#### Hallando un punto en la intersección de conjuntos convexos

Supongamos que deseamos hallar un punto en :

$$C = C_1 \cap \dots \cap C_m \neq \emptyset$$

donde cada  $C_i$  es un conjunto convexo y cerrado, es fácil ver que este problema es equivalente al de hallar un punto óptimo mínimo de la función

$$f(x) = \max\{d(C_1, x), d(C_2, x), \dots, d(C_m, x)\} \text{ y también de } q(x) = \sum_{i=1}^m d(C_i, x)^2.$$

Como la función  $f_i$  definida por  $f_i = d(C_i, x)$  es convexa para cada  $i = 1, \dots, m$ , se tiene que la función  $f$  es convexa.

Por tanto  $x^* \in C$  si y solo si  $f(x^*) = 0$ .

Utilizaremos el método subgradiente para hallar una aproximación al punto óptimo de  $f$ , y por consiguiente a un punto de  $C$ . Primero calculamos un subgradiente de la función distancia a un conjunto  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ , convexo y cerrado cualesquiera. Definamos la función,  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $g(x) = d(S, x)$  que es convexa, se tiene por el Lema 1.3 que  $S \subseteq H$ , donde  $H = \{z \in \mathbb{R}^n : \langle x - P_S(x), z - P_S(x) \rangle \leq 0\}$  ver Figura (19), además se tiene que para toda  $y \in \mathbb{R}^n$  que  $d(S, y) \geq \frac{\langle x - P_S(x), y - P_S(x) \rangle}{\|x - P_S(x)\|}$  luego:

$$d(S, y) \geq \frac{\langle x - P_S(x), x - P_S(x) + y - x \rangle}{\|x - P_S(x)\|} = \|x - P_S(x)\| + \frac{\langle x - P_S(x), y - x \rangle}{d(S, x)}$$

así  $g(y) \geq g(x) + \frac{\langle x - P_S(x), y - x \rangle}{d(S, x)}$  y por tanto  $s_x = \frac{x - P_S(x)}{d(S, x)} \in \partial g(x)$  luego:

$$s_x = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in S \\ \frac{x - P_S(x)}{d(S, x)} & \text{si } x \notin S \end{cases}$$

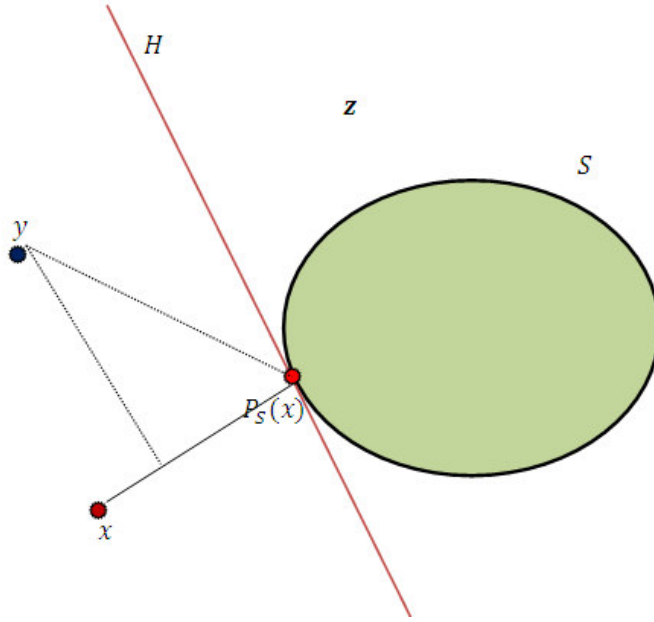


Figura 19:

Ahora implementamos el método del subgradiente con tamaño de paso optimal. Sea  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  un punto inicial y  $x_k$  la  $k$ -ésima iteración del método subgradiente, si  $C_j$  es un conjunto que cumple  $f(x_k) = d(C_j, x_k)$  entonces tenemos que  $\frac{x - P_{C_j}(x_k)}{d(C_j, x_k)} \in \partial f(x_k)$  así el método subgradiente con tamaño de paso optimal es dado por:

$$x_{k+1} = x_k - \left( \frac{x_k - P_{C_j}(x_k)}{d(C_j, x_k)} \right) \frac{f(x_k) - f^*}{\|s_k\|^2}$$

como  $f^* = 0$ ,  $f(x_k) = d(C_j, x_k)$  y  $\|s_k\| = 1$  entonces tenemos que:

$$x_{k+1} = P_{C_j}(x_k) \quad k = 0, 1, \dots$$

### Ejemplo numérico 1

Consideremos los conjuntos

$$C_1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq r^2\}$$

$$C_2 = \{(x, y) : (x - 2r)^2 + y^2 \leq r^2\}$$

$$C_3 = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0\}$$

Haciendo los cálculos para las proyecciones sobre estos conjuntos tenemos:

$$P_{C_3}(x, y) = (\max\{x, 0\}, \max\{y, 0\})$$

$$P_{C_1}(x, y) = \begin{cases} (x, y) & \text{si } (x, y) \in C_1 \\ (\frac{rx}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{ry}{\sqrt{x^2+y^2}}) & \text{si } (x, y) \notin C_1 \end{cases}$$

$$P_{C_2}(x, y) = \begin{cases} (x, y) & \text{si } (x, y) \in C_2 \\ (\frac{r(x-2r)}{\sqrt{(x-2r)^2+y^2}} + 2r, \frac{ry}{\sqrt{(x-2r)^2+y^2}}) & \text{si } (x, y) \notin C_2 \end{cases}$$

Tomamos en  $C_1$ ,  $r = 1,1$  y en  $C_2$ ,  $r = 1$ , la Figura (20) muestra la zona de intersección de color amarillo. Los puntos de intersección de las circunferencias son  $(1,0525, \pm 0,319755766171621)$ . Diseñamos el programa subgra1.m para generar las iteraciones producidas por el método subgradiente para los siguientes puntos iniciales  $x_0 = (3, 6)$ ,  $x_0 = (-2, 5)$ ,  $x_0 = (-4, -6)$  y  $x_0 = (5, -5)$ .

iteración	$x_0 = (3, 6)$	$x_0 = (-2, 5)$
0	(3, 6)	(-2, 5)
10	(1.060026195115916 , 0.341246606036950)	( 1.045763534514495 , 0.341143122281178 )
20	(1.053347244373679 , 0.322255427052972)	(1.051740654418391 , 0.322244621124347 )
30	( 1.052606180347568 , 0.320070227425755)	( 1.052585151161325 , 0.320007975213103 )
40	(1.052513475886756, 0.319795695130193)	(1.052487920227382 ,0.319795524945926 )
50	(1.052501713012288 , 0.319760842123221 )	(1.052498464453827 , 0.319760820492967 )
60	(1.052500217796662 , 0.319756411545769 )	(1.052499804766767 , 0.319756408795693 )
70	( 1.052500027691922, 0.319755848228287)	(1.052499975176921 ,0.319755847878627 )
80	(1.052500003520922 ,0.319755776604813 )	( 1.052499996843841 , 0.319755776560355 )
90	(1.052500000447672 , 0.319755767498162)	( 1.052499999598706 , 0.319755767492509 )
100	( 1.052500000056920,0.319755766340285)	(1.052499999948977 , 0.319755766339567 )
110	(1.052500000007237 , 0.319755766193066)	(1.052499999993513 , 0.319755766192974 )
120	(1.052500000000920 , 0.319755766174347)	( 1.052499999999175, 0.319755766174336 )
130	(1.052500000000117 ,0.319755766171967)	(1.052499999999895 , 0.319755766171966 )
140	(1.052500000000015 , 0.319755766171665)	(1.052499999999987, 0.319755766171665)
150	( 1.052500000000002 , 0.319755766171626)	(1.052499999999998 , 0.319755766171626 )
160	(1.052500000000000 ,0.319755766171622 )	(1.052500000000000 ,0.319755766171621 )
162	( 1.052500000000000 ,0.319755766171621)	( 1.052500000000000 , 0.319755766171621 )
iteración	$x_0 = (-4, -6)$	$x_0 = (10, -10)$
0	( -4., -6)	(10,-10)
1	(1.292893218813453 , -0.707106781186548)	( 0.777817459305202 , -0.777817459305202 )
2	(1.292893218813453 , 0)	( 0.777817459305202 , 0 )
3	(1.1 , 0)	( 1, 0 )

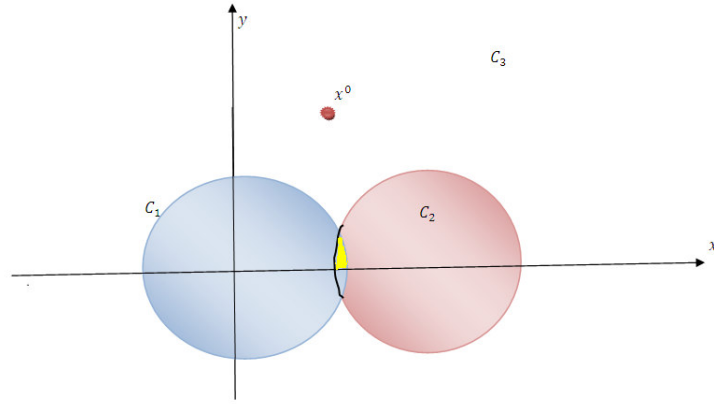


Figura 20:

Se puede observar que los puntos hallados en las ultimas iteraciones pertenecen a la interseccion.

Los siguientes ejemplos muestran el comportamiento del método subgradiente que es aplicado para dos funciones convexas no diferenciables, que fueron extraidas de [2] y son comunmente usadas como ejemplos numéricos en optimización no diferenciable.

### Ejemplo numérico 2

Consideremos el problema de minimizar en  $\mathbb{R}^2$  la función convexa Charalambous/Bandler (ver [2]) en dimensión 2, dada por:

$$f(x) = \max \{x_1^4 + x_2^2, (2 - x_1)^2 + (2 - x_2)^2, 2e^{-x_1+x_2}\}$$

cuyo punto óptimo es  $x^* = (1, 1)$  y el valor óptimo es  $f^* = 2$ . La gráfica de esta función se muestra en la Figura (21). Implementamos el programa subgra2.m en Matlab para generar las iteraciones del método subgradiente, la Figura (22) muestra la gráfica del error tomando como punto inicial  $(2, -1)$  y los pasos de cuadrado sumable, pero no sumable normalizados  $l_k = \frac{\gamma_k}{\|s_k\|}$  tomando  $\gamma_k = \frac{1}{k+1}$ ; la tabla siguiente algunas iteraciones del método.

$k$	1	5	10	15	20	25
$f(x_k)$	17	4.2241	2.3326	2.1305	2.2652	2.4873

30	35	40	45	50	55	60
2.6723	2.8450	2.4532	2.1631	2.1470	2.2925	2.4302

65	70	72	74	76	78	80
2.5632	70. 2.3742	2.3452	2.3253	2.1703	2.1186	2.0843



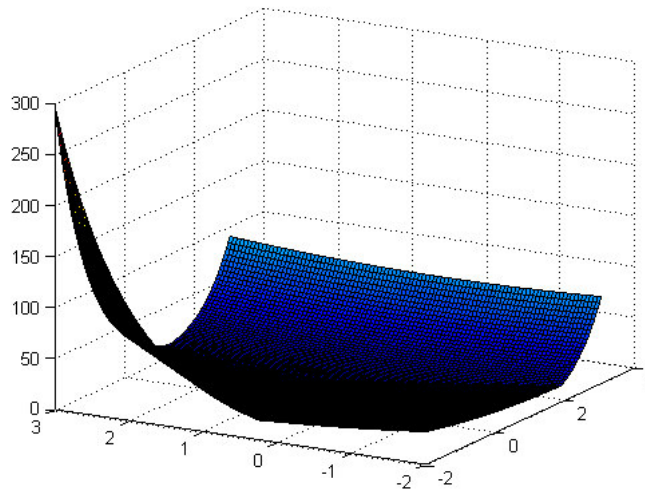


Figura 21: Gráfica de la función

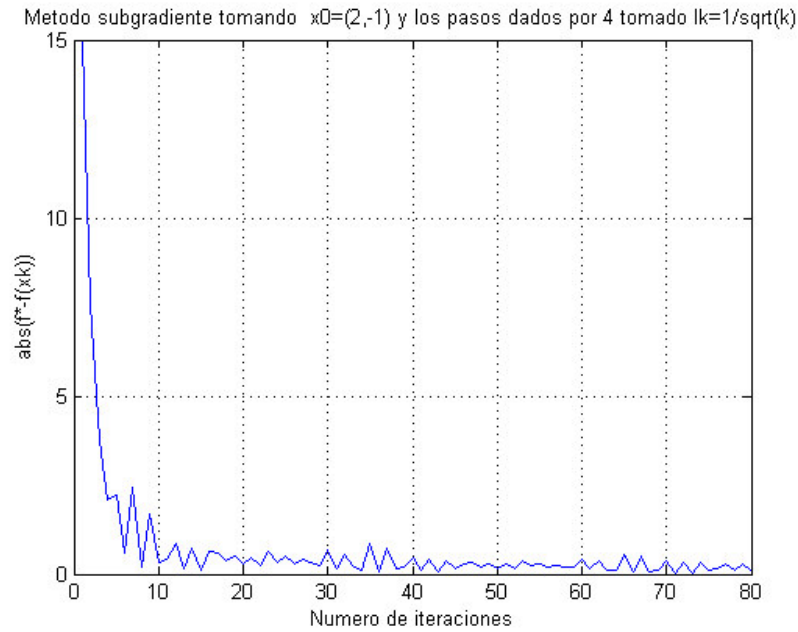


Figura 22:

### Ejemplo numérico 3

Consideremos el problema de minimizar en  $\mathbb{R}^2$  la función convexa Demyanov/Malosemov (ver [2]).

$$f(x) = \max \{5x_1 + x_2, -5x_1 + x_2, x_1^2 + x_2^2 + 4x_2\}$$

cuyo punto óptimo es  $(0, -3)$  y su respectivo valor óptimo es  $f^* = -3$

En cada  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  se tiene que:  $\partial f(x_1, x_2) = \text{co} \{ \nabla f_i(x_1, x_2) : i \in I(x_1, x_2) \}$ . La Figura (23) muestra la gráfica de esta función.

Implementamos en Matlab el programa subgra3.m para generar las iteraciones del método subgradiente, tomando los pasos disminuyentes normalizados  $l_k = \frac{\gamma_k}{\|s_k\|}$  donde  $\gamma_k = \frac{1}{\sqrt{k+1}}$ .

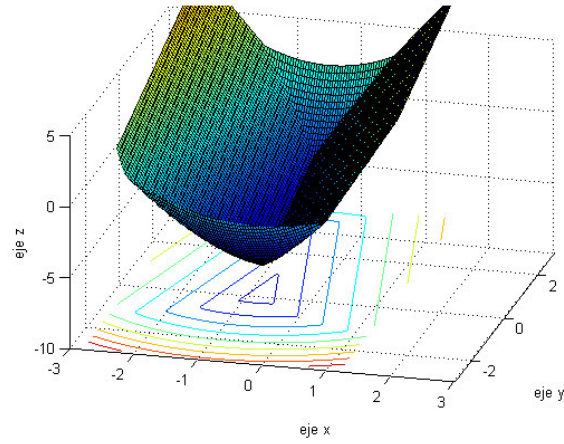


Figura 23:

La siguiente tabla muestra estas iteraciones tomando como punto inicial  $(3, -2)$ .

Iteración	Subgradiente $s_k \in \partial f(x)$	punto $x_k$	$\gamma_k = \frac{1}{\sqrt{k+1}}$	valor $f(x_k)$
0	(5,1)	(3.0000, -2.0000)	1	13
1	(5,1)	( 2.3066 , -2.1387)	0.7071	9.3944
5	(5,1)	( 0.4113, -2.5177)	0.4082	-0.4610
10	(5,1)	( 0.0065, -2.8477)	0.3015	-2.8154
15	(5,1)	(0.0032, -2.8118)	0.2425	-2.7955
20	(-5,1)	(-0.2117, -3.0372)	0.2132	-1.9785
25	(-5,1)	( -0.1904, -2.9882)	0.1925	-2.0361
30	(-5,1)	(-0.1745, -2.9444)	0.1768	-2.0722
35	(-5,1)	(-0.1622, -2.9105)	0.1644	-2.0993
40	(-5,1)	(-0.1523, -2.8785)	0.1543	-2.1171
45	( -0.0017 , -2.0528)	(-0.0009; -3.0264)	0.1459	-2.9465
50	(-5,1)	( -0.0007, -2.9920)	0.1387	-2.9888
55	(-5,1)	(-0.0006 ; -2.9627)	0.1336	-2.2782
56	(-5,1)	(0.1292 ; -2.9887)	0.1325	-2.9596
57	( 5, 1)	( 0.0005 ; -3.0145)	0.1313	-2.3425
58	( 0.0010, -2.0289)	( 0.0004 ; -2.8843)	0.1302	-2.9708
59	(5,1)	(-0.1262 ; -2.9096)	0.1291	-2.8821
60	(-5,1)	(- 0.0006 ; -2.9347)	0.1280	-2.2788
61	(-5,1)	(0.1239 ; -2.9596)	0.1270	-2.9316
62	(5,1)	(0.0004 ; -2.9843)	0.1260	-2.3400
63	(5,1)	( -0.1222 ; -3.0088)	0.1250	-2.9824
64	(-5,1)	(-0.0006 ; -3.0332)	0.1240	-2.3979

De la tabla anterior se puede observar que el método subgradiente no es un método de valores descendente como si lo es, por ejemplo, el método del gradiente, esto se muestra por ejemplo en las iteraciones 10, 15, 20 y 58, 59, 60 el valor de la función aumenta, esto podría darse debido a que los puntos de las iteraciones anteriores están más próximos al óptimo que los actuales, este comportamiento es debido a que el subgradiente no es una dirección de descenso.

A partir del método subgradiente se puede dar una ligera modificación de tal manera de convertirlo en un algoritmo descendente, esta modificación se basa en la siguiente observación básica, si  $(x_k)$  es una sucesión de números reales con  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$  y  $x^* \leq x_k$  entonces para la sucesión  $y_k = \min \{x_0, x_1, \dots, x_k\}$  se tiene  $y_k \rightarrow x^*$ . Para esto, en la iteración  $k$ -ésima tomamos el mejor valor obtenido hasta esa iteración por el método del subgradiente usual i.e,  $f_k^{mej} = \min \{f_{k-1}^{mej}, f(x_k)\}$  donde  $f_{k-1}^{mej} = \min \{f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_{k-1})\}$  y  $f_0^{mej} = f_0$ , así si  $f_k^{mej} = f(x_k)$  entonces  $x_k$  es el mejor punto encontrado y  $i_k^{mej} = i_k$  la mejor iteración encontrada; con esta modificación se puede tener cierto control sobre la precisión deseada y obtener ciertos criterios de parada. Para estudiar la convergencia de esta modificación del método subgradiente asumiremos que la función objetivo es Lipschitz esta condición permite tener siempre los subgradientes acotados, más en general esta condición no es necesaria para

la convergencia, en algunos casos bastará con elegir los pasos adecuados de tal forma de obtener una sucesión  $(x_k)$  acotada.

**Teorema 3.12** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\partial f(x) \neq \emptyset$  para cada  $x \in \mathbb{R}^n$ ; entonces  $f$  es Lipschitziana con constante de Lipschitz  $L$  sí y sólo si  $\|s\| \leq L$  para toda  $s \in \partial f(x)$ , y toda  $x \in \mathbb{R}^n$ .

### Prueba

Sean  $x \in \mathbb{R}^n$  fijo, arbitrario,  $s \in \partial f(x)$  entonces  $f(y) \geq f(x) + \langle s, y - x \rangle$  para toda  $y \in \mathbb{R}^n$  luego  $\langle s, y - x \rangle \leq L \|x - y\|$ , tomemos  $y = x + s$  así tenemos  $\|s\| \leq L$ .

Recíprocamente para  $x$  fijo arbitrario tenemos  $f(y) - f(x) \geq \langle s_x, y - x \rangle$  para toda  $y$  con  $s_x \in \partial f(x)$  entonces  $f(x) - f(y) \leq \langle s_x, x - y \rangle \leq \|s_x\| \|x - y\| \leq L \|x - y\|$  análogamente  $f(y) - f(x) \leq \langle s_y, y - x \rangle \leq \|s_y\| \|x - y\| \leq L \|x - y\|$  así se tiene:  $|f(y) - f(x)| \leq L \|x - y\|$ .  $\square$

Para el estudio de la convergencia de esta modificación del método subgradiente, partimos de una desigualdad básica del método subgradiente:

Sea  $x^* \in X^*$  fijo arbitrario, entonces:

$$\|x_{k+1} - x^*\|^2 = \|x_k - l_k s_k - x^*\|^2 = \|x_k - x^*\|^2 - 2l_k \langle s_k, x_k - x^* \rangle + l_k^2 \|s_k\|^2$$

utilizando la desigualdad  $f(x^*) \geq f(x_k) + \langle s_k, x^* - x_k \rangle$  se tiene

$$l_k 2(f(x_k) - f^*) \leq \|x_k - x^*\|^2 + l_k^2 \|s_k\|^2 - \|x_{k+1} - x^*\|^2, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

utilizando esta última desigualdad para  $k = 0, \dots, n$  y luego sumando obtenemos:

$$2 \sum_{i=0}^n l_i (f(x_i) - f^*) \leq \sum_{i=0}^n \|x_i - x^*\|^2 + \sum_{i=0}^n l_i^2 \|s_i\|^2 - \sum_{i=0}^n \|x_{i+1} - x^*\|^2$$

resultando

$$2 \sum_{i=0}^n l_i (f(x_i) - f^*) \leq \|x_0 - x^*\|^2 + \sum_{i=0}^n l_i^2 \|s_i\|^2 \quad (18)$$

De la definición  $f_k^{mej} = \min_{0 \leq i \leq k} f(x_i)$  tenemos,

$$(f_n^{mej} - f^*) \leq \frac{\|x_0 - x^*\|^2 + \sum_{i=0}^n l_i^2 \|s_i\|^2}{2 \sum_{i=0}^n l_i} \quad (19)$$

puesto que  $f$  es Lipschitziana para algún  $G > 0$  tenemos que  $\|s_i\| \leq G$  para toda  $i = 0, 1, \dots$ , además sea  $R$ , tal que  $\|x_0 - x^*\| \leq R$  así de (19), se tiene:

$$(f_n^{mej} - f^*) \leq \frac{R^2}{2 \sum_{i=0}^n l_i} + \frac{\sum_{i=0}^n l_i^2 G^2}{2 \sum_{i=0}^n l_i} \quad (20)$$

Para cuestiones computacionales, es útil conocer el valor de  $G$ , esto permite tener cierto control sobre la precisión deseada.

Eligiendo algunos pasos podemos obtener algunos criterios de convergencia.

### Tamaño de paso constante

Si tomamos un tamaño de paso fijo como  $l_i = l$  entonces de (20) tenemos:

$$(f_n^{mej} - f^*) \leq \frac{R^2}{2(n+1)l} + \frac{lG^2}{2}$$

Lo cual no garantiza la convergencia de  $f_n^{mej}$  al valor óptimo  $f^*$ , el lado derecho converge a  $\frac{G^2l}{2}$ , así  $f_n^{mej}$  converge por debajo de un  $\frac{G^2l}{2}$  del optimal, se deduce que para que se tenga  $f_n^{mej} - f^* \leq G^2l$ , se necesita iteraciones superiores a  $\frac{R^2}{G^2l^2} - 1$ .

De lo anterior deducimos que dado  $\epsilon > 0$ , si deseamos hallar una aproximación  $f_{n_0}^{mej}$  de  $f^*$  con  $f_{n_0}^{mej} - f^* < \epsilon$  utilizando los pasos anteriores tenemos que elegir  $l < \frac{\epsilon}{G^2}$  y la aproximación deseada se hallará después de por lo menos  $\frac{R^2}{G^2l^2} - 1$  iteraciones.

### Longitud de paso constante

Si tomamos los paso de tamaño de paso constante como  $l_k = \frac{l}{\|s_k\|}$  esto implica que  $\|x_k - x_{k+1}\| = l$ , en este caso tenemos de (19) que :

$$(f_n^{mej} - f^*) \leq \frac{R^2}{2(n+1)l/G} + \frac{lG}{2}$$

tampoco se garantiza convergencia, para  $n$  suficientemente largo  $f_n^{mej}$  converge por debajo de un  $\frac{Gl}{2}$  del optimal.

Para obtener  $f_n^{mej} - f^* \leq Gl$  se necesitará iteraciones superiores a  $\frac{R^2}{l^2} - 1$ .

### Tamaño de paso disminuyente

En este caso tomamos los pasos  $l_k$ , satisfaciendo las condiciones:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} l_k = 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} l_k = \infty$$

entonces en (20) el primer termino tiende a 0 mientras que la sucesión

$$\frac{\sum_{k=0}^n l_k^2}{\sum_{k=0}^n l_k}$$

tiende a 0, en efecto dado  $\epsilon > 0$  existe un  $n_1 \in \mathbb{N}$  tal que para  $k \geq n_1$  se tiene  $l_k \leq \frac{\epsilon}{2}$ , también en virtud de que la serie es divergente existe un  $n_2 \in \mathbb{N}$  tal que

$$\sum_{i=0}^n l_i \geq \frac{2}{\epsilon} \sum_{i=0}^{n_1} l_i^2 \quad \text{para } n \geq n_2$$

Sea  $N = \max \{n_1, n_2\}$  entonces para  $n \geq N$  se tiene :

$$\frac{\sum_{i=0}^n l_i^2}{\sum_{i=0}^n l_i} \leq \frac{\sum_{i=0}^{n_1} l_i^2}{\sum_{i=0}^{n_1} l_i} + \frac{\sum_{i=n_1+1}^n l_i^2}{\sum_{i=0}^{n_1} l_i + \sum_{i=n_1+1}^n l_i} \leq \frac{\sum_{i=0}^{n_1} l_i^2}{\frac{2}{\epsilon} \sum_{i=0}^{n_1} l_i^2} + \frac{\sum_{i=n_1+1}^n l_i \frac{\epsilon}{2}}{\sum_{i=n_1+1}^n l_i} = \epsilon$$

así se tiene que  $f_n^{mej} \rightarrow f^*$ .

### Tamaño de paso disminuyente normalizado

Consideremos el tamaño de paso dado por  $l_k = \frac{\gamma_k}{\|s_i\|}$  donde  $\gamma_k$  es una sucesión no sumable y convergente a cero, en este caso de (20) tenemos:

$$(f_n^{mej} - f^*) \leq \frac{R^2 + \sum_{i=0}^n \gamma_i^2}{2/G \sum_{i=0}^n \gamma_i}$$

de donde se observa que  $f_n^{mej} \rightarrow f^*$ .

### Tamaño de paso optimal

Si asumimos conocido el valor óptimo  $f^*$ , y consideramos los pasos dados por  $l_k = \theta_k \frac{f(x_k) - f(x^*)}{\|s_k\|^2}$  con  $0 < c_1 \leq \theta_k \leq c_2 < 2$  entonces por el Teorema 3.10 tenemos que  $f(x_k) \rightarrow f^*$  entonces de la definición de  $f_k^{mej}$  tenemos que  $f^* \leq f_k^{mej} \leq f(x_k)$  entonces  $f_k^{mej} \rightarrow f^*$ .

### Una cota de las cotas suboptimales

Para obtener cotas de las cotas suboptimales nos podemos preguntar que sucesión de pasos minimiza el lado derecho de (20), esto es, elegir los pasos  $l_0, l_1, \dots, l_n$  de tal forma que:

$$\frac{R^2 + \sum_{i=0}^n l_i^2 G^2}{2 \sum_{i=0}^n l_i}$$

tome el mínimo valor posible, esta expresión como una función de  $l_0, l_1, \dots, l_n$  es convexa y simétrica, luego el valor mínimo se obtiene tomando todas las cantidades iguales  $l = l_0 = l_1 = \dots, = l_n$ . Así la expresión anterior se reduce a:

$$\frac{R^2 + G^2(n+1)l^2}{2(n+1)l}$$

esta expresion como función de  $l$  toma su valor mínimo en  $l = \frac{R}{G\sqrt{n+1}}$ , así la elección de los pasos que minimizan la cota sub optimal es  $l_i = \frac{R}{G\sqrt{n+1}}$  para  $i = 0, 1, 2, \dots, n$  con esta elección

del tamaño de paso tenemos:

$$(f_n^{mej} - f^*) \leq \frac{RG}{\sqrt{n+1}}$$

así si tomamos un  $\epsilon > 0$  y deseamos una iteración  $n_0$  en la que  $f_{n_0}^{mej} - f^* < \epsilon$  entonces elegimos un  $n_0$  tal que  $(\frac{RG}{\epsilon})^2 - 1 < n_0$  y tomamos los pasos dados por  $l_i = \frac{R}{G\sqrt{n_0+1}}$  para  $i = 0, 1, 2, \dots, n_0$ .

### Un criterio de parada

De (19) podemos hallar una sucesión de cotas inferiores para  $f^*$  que podrían usarse como criterios de parada de la siguiente manera, reescribiendo (19) tenemos:

$$f^* \geq \alpha_n = \frac{2 \sum_{i=0}^n l_i f(x_i) - \|x_0 - x^*\|^2 - \sum_{i=0}^n l_i^2 \|s_i\|^2}{2 \sum_{i=0}^n l_i}$$

estos pasos  $\alpha_n$  pueden ser calculados después de la  $n$ -ésima iteración  $x_n$ . La sucesión  $\alpha_0, \alpha_1, \dots$  no necesariamente es creciente, luego para poder obtener una sucesión creciente definimos:

$$\alpha_n^{mej} = \max \{\alpha_0, \dots, \alpha_n\}$$

así podemos terminar el algoritmo cuando  $f_k^{mej} - \alpha_k^{mej}$  sea menor que una cantidad prefijada.

### Ejemplo numérico 4

Consideremos el problema  $\min_{x \in \mathbb{R}^5} f(x)$  donde  $f : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}$  es definida por  $f(x) = \|Ax - b\|_1$  donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -3 & 4 & -2 \\ -3 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 3 & -1 & 2 \\ 6 & 1 & 0 & -3 & -5 \\ -4 & -5 & -1 & -5 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \\ -2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

El punto óptimo es  $x^* = (0,0287, -0,7775, 1,4593, 0,7129, -0,7488)$  y el valor óptimo es  $f^* = 4$ , es inmediato ver que la función es convexa. Veamos que es Lipschitz

$$|f(x) - f(y)| \leq \|(Ax - b) - (Ay - b)\|_1 = \|A(x - y)\|_1 \leq \|A\| \|x - y\|_1 = 18 \|x - y\|_1$$

Hemos utilizado que la norma matricial inducida por la norma de la suma  $\|\cdot\|_1$  en el espacio vectorial  $\mathbb{R}^{m \times n}$  es dada por  $\|A\| = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|$ .

Ahora calculemos un subgradiente.

Para la función convexa  $g(x) = \|x - b\|$  es fácil ver que  $\frac{x-b}{\|x-b\|} \in \partial g(x)$  si  $x \neq b$  y  $0 \in \partial g(b)$  utilizando el Teorema 2.8 tenemos que  $A^t \frac{Ax-b}{\|Ax-b\|} \in \partial f(x)$  si  $Ax \neq b$  y  $0 \in \partial f(x)$  si  $Ax = b$ .

Implementamos el programa subgra4.m que genera las iteraciones producidas por el método

subgradiente modificado; en la tabla siguiente y en la Figura (24) se muestran las iteraciones para los pasos dados por  $l_k = \frac{l}{\|s_k\|}$  para  $l=0.01, 0.001, 0.0001$ , tomando como punto inicial  $(0, 0, 0, 0, 0)$ .

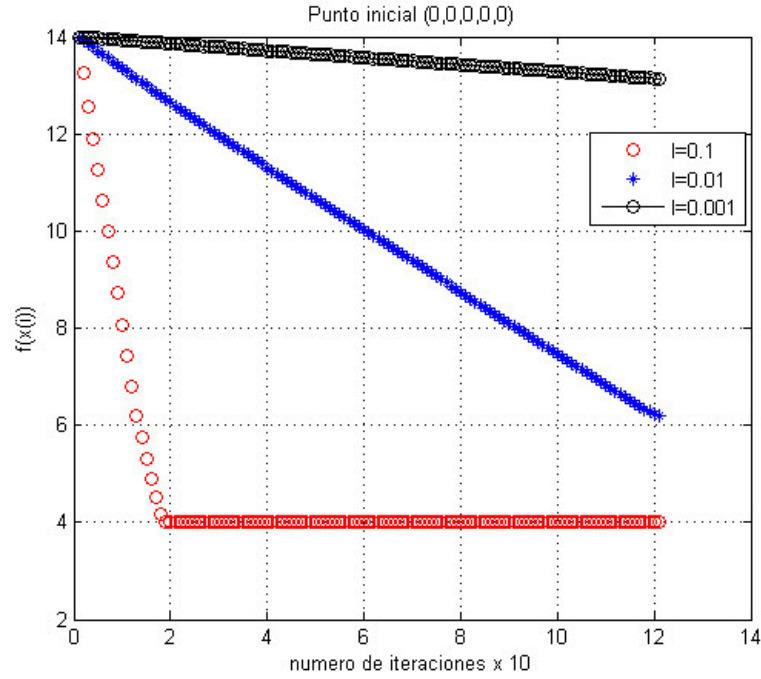


Figura 24:

Iteración	$l=0.1$	$l=0.01$	$l=0.001$
	$f(x_k)$	$f(x_k)$	$f(x_k)$
0	14	14	14
2	13.26430	13.8531	13.9853
5	10.62216	13.6343	13.9632
10	7.43507	13.2743	13.9265
20	4	12.5740	13.8532
30	4	11.8987	13.7802
40	4	11.2425	13.7073
50	4	10.5975	13.6274
60	4	9.9572	13.5622
70	4	9.3179	13.4901
80	4	8.6780	13.4181
90	4	8.0380	13.3465
100	4	7.4000	13.2821
110	4	6.7673	13.2038
120	4	6.1880	13.1329



Ahora tomemos como punto inicial  $x_0 = (2, 3, 0, 4, -1)$  y tomemos los pasos dados por  $l = 0,5$ ,  $l = 0,1$ ,  $l = 0,05$ , las iteraciones producidas por el método subgradiente modificado se muestran en la tabla siguiente y en la Figura 25.

Iteración	$l=0.5$	$l=0.1$	$l=0.05$
	$f(x_k)$	$f(x_k)$	$f(x_k)$
0	90	90	90
5	47.4498	81.3738	85.6814
10	11.2262	72.8058	81.3764
20	6.6926	55.8868	72.8110
30	6.3517	39.3673	64.3139
40	6.0879	25.3007	55.8977
50	5.9779	10.8906	47.5798
60	5.9355	5.0073	39.3841
70	5.9191	4	32.0866
80	5.9128	4	25.2715
90	5.9106	4	18.2215
100	5.9094	4	10.8526
110	5.9090	4	7.3689
120	5.9089	4	4.9646

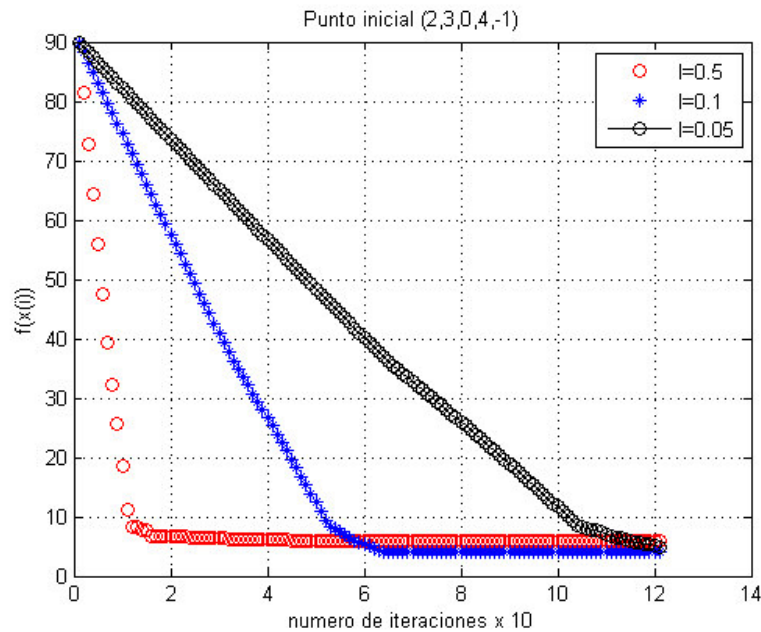


Figura 25:

Ahora consideremos el punto inicial  $x_0 = (3, -1, 4, 2, -2)$  y tomemos los pasos  $l_k = \frac{1}{k+1}$ ,  $l_k = \frac{1}{\sqrt{k+1}}$ ,  $l_k = \frac{f(x_k) - f^*}{\|s_k\|^2}$  para  $k \geq 0$ , las iteraciones producidas por el método subgradiente modificado se muestran en la tabla siguiente y en la Figura (26).

Iteración	$l_k = \frac{1}{k+1}$	$l_k = \frac{1}{\sqrt{k+1}}$	$l_k = \frac{f(x_k) - f^*}{\ s_k\ ^2}$
	$f(x_k)$	$f(x_k)$	$f(x_k)$
0	48	48	48
5	8.8678	12.9767	12.9767
10	6.7776	10.3073	12.4535
20	4.6121	6.2416	6.7982
27	4.0311	5.3310	5.3310
28	4	5.3310	5.3310
50	4	5.1991	5.2330
60	4	4.9951	5.0380
70	4	4.8864	4.9038
80	4	4.8013	4.8181
90	4	4.7059	4.7358
100	4	4.5371	4.5692

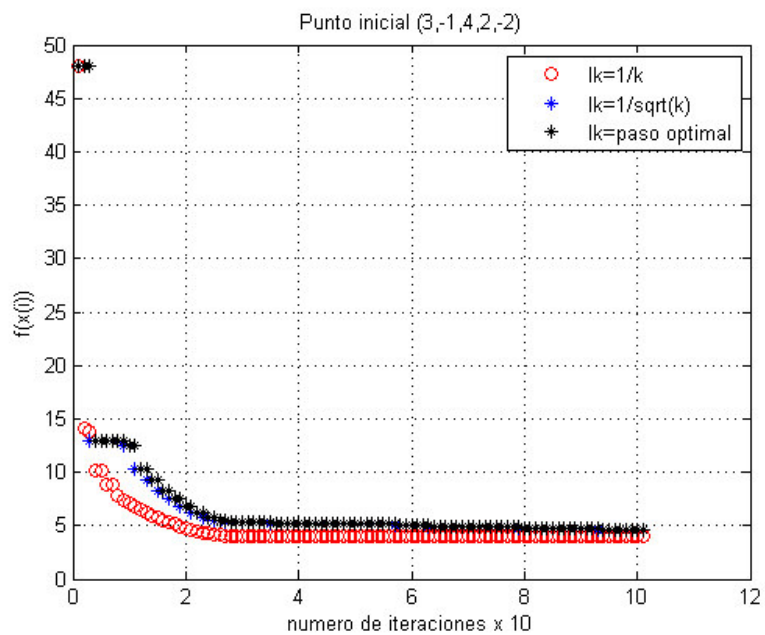


Figura 26:

## Método del subgradiente proyectado.

El método subgradiente proyectado es una extensión del método subgradiente, que se basa en el método gradiente proyectado. Este método puede ser usado, para aproximarnos al punto óptimo de un problema convexo con restricciones.

Consideremos el problema convexo con restricciones (PCR):

$$PCR : f^* = \min_{x \in C} f(x)$$

donde  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  es convexo y cerrado y donde  $f$  es como siempre una función convexa no necesariamente diferenciable. El método del subgradiente proyectado es dado por:

$$x_{k+1} = P_C(x_k - l_k s_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

donde  $P_C$  es la proyección euclidiana sobre  $C$  y  $s_k \in \partial f(x_k)$ . Los tamaños de paso mostrados en la sección anterior pueden ser usados en el PCR con resultados similares de convergencia. Las pruebas de convergencia dadas para el método del subgradiente son adaptables al método del subgradiente proyectado, para observar esto, sea  $x^* \in X^*$  y  $z_{k+1} = x_k - l_k s_k$  la iteración  $k + 1$ , antes de la proyección sobre  $C$ , así tenemos:

$$\|z_{k+1} - x^*\|^2 \leq \|x_k - x^*\|^2 - 2l_k(f(x_k) - f^*) + l_k^2 \|s_k\|^2, \quad x_k \in C$$

por otro lado tenemos:

$$\|x_{k+1} - x^*\| = \|P_C(z_{k+1}) - x^*\| \leq \|z_{k+1} - x^*\|$$

así cuando proyectamos un punto sobre  $C$  la proyección es un punto más cercano a cualquier punto de  $C$ , en particular nos acercamos más al óptimo. De estas dos desigualdades tenemos:

$$\|x_{k+1} - x^*\|^2 \leq \|x_k - x^*\|^2 - 2l_k(f(x_k) - f^*) + l_k^2 \|s_k\|^2$$

y las prueba sobre convergencia proceden del mismo modo que en la del método del subgradiente usual.

Para fines prácticos e implementación computacional de este método, dos principales requerimientos son necesarios :

Una forma práctica de hallar  $s_k \in \partial f(x_k)$  para toda  $k = 0, 1, 2, \dots$ .

Un conjunto apropiado  $C$ , tal que sea posible obtener de manera explícita  $P_C$ .

Mostraremos algunos conjuntos cuyas proyecciones pueden calcularse de manera explícita y suelen usarse en problemas prácticos.

- Sea el hiperplano  $H = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, s \rangle = c\}$  si  $x \in \mathbb{R}^n$  entonces

$$P_H(x) = x - \frac{\langle x, s \rangle - c}{\|s\|^2} s.$$

- Sea el semiplano  $H^- = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, s \rangle \leq c\}$  si  $x \in \mathbb{R}^n$  entonces  $P_{H^-}(x) = x - \frac{\max\{0, \langle x, s \rangle - c\}}{\|s\|^2} s$ .
- Sea la bola cerrada  $B[0, \delta] = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y\| \leq \delta\}$ , si  $x \in B[0, \delta]$  entonces  $P_{B[0, \delta]}(x) = x$ , si  $x \notin B[0, \delta]$  entonces  $P_{B[0, \delta]}(x) = \frac{\delta x}{\|x\|}$ .
- Consideremos el cono de helado dado por  $K = \{(x, \tau) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \|x\| \leq \tau\}$

$$P_K(x, \tau) = \begin{cases} (x, \tau) & \text{si } \|x\| \leq \tau \\ (0, 0) & \text{si } \|x\| \leq -\tau \\ \frac{\|x\| + \tau}{2} \left( \frac{x}{\|x\|}, 1 \right) & \text{otro caso} \end{cases}$$

- Si  $C$  es afín i.e  $C = \{y \in \mathbb{R}^n : Ay = b\}$  donde  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  es una matriz de rango máximo y  $b \in \mathbb{R}^m$ , si  $x \in \mathbb{R}^n$  entonces  $P_C(x) = x - A^t(AA^t)^{-1}(Ax - b)$ .

### Ejemplo numérico 5

Consideremos el siguiente problema en  $\mathbb{R}^5$ :

$$\min_{Ax=b} \|x\|_1$$

Donde  $f(x) = \|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4| + |x_5|$  es convexa sobre  $\mathbb{R}^5$ , no diferenciable sobre  $T = \{x \in \mathbb{R}^5 : x_i = 0, \text{ para algún } i = 0, \dots, 5\}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 3,5884 \\ -0,1723 \\ -2,3110 \end{pmatrix}$$

Es inmediato ver que si  $x \in \mathbb{R}^n$  el vector  $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$  con  $s_i = \text{sgn}(x_i)$  para  $i = 1, \dots, n$  es un subgradiente de  $f(x) = \|x\|_1$  en  $x$ , denotaremos  $s = \mathbf{sgn}(x)$ . Así el método del subgradiente proyectado es:

$$x_{k+1} = P_C(x_k) = x_k - l_k(I - A^t(AA^t)^{-1}A)\mathbf{sgn}(x_k)$$

Implementamos el programa subgra5.m para generar las iteraciones producidas por método del subgradiente proyectado, tomando como punto inicial a

$x_0 = (-5,00225, -5,17455, 0, 2,86355, 0)$ ; nótese que es este caso los subgradientes en cada iteracion forman un conjunto acotado asi podemos considerar los pasos disminuyentes dados por  $l_k = \frac{1}{\sqrt{k+1}}$ . La tabla siguiente muestra estas iteraciones.

Iteración	$x_k$	$f(x_k)$
0	( -5.00225 , -5.17455 , 0 , 2.86355 , 0 )	7.745862854937466
5	(-2.82282, -3.33150, 0.61623, 1.92789, -0.30246)	4.822370299253825
10	(-1.69939 , -2.38144, 0.93388, 1.44559, -0.45837)	3.425096583945325
20	(-0.43667, -1.3136, 1.29091, 0.90349, -0.63361)	2.191015334884264
30	(0.06199, -0.89193, 1.43191, 0.68940, -0.70282)	1.960621842616264
40	(0.20568 , -0.77041, 1.47254 , 0.62771 , -0.72276)	1.929842981536047
50	( 0.26009, -0.72440, 1.48793, 0.60435 , -0.73031)	1.924999782503354
60	( 0.28454, -0.70370 , 1.49485 0.59385 , -0.73371 )	1.924065494388922
70	(0.29441, -0.69538, 1.49763, 0.58962, -0.73508)	1.923854280214169
80	(0.29960, -0.69099 , 1.49910 ,0.58739 , -0.73580 )	1.923800324181571
90	(0.30197, -0.68898, 1.49975, 0.58637, -0.73613)	1.923785136778884
100	(0.30295 , -0.68816 ,1.50004, 0.58596 , -0.73626)	1.923780772058273

Ahora consideremos la función del Ejemplo numérico 4, manteniendo el conjunto factible del Ejemplo 5 nótese que el punto óptimo

$$x^* = (0,0287, -0,7775, 1,4593, 0,7129, -0,7488) \in C = \{y \in \mathbb{R}^n : Ay = b\}.$$

Implementamos el programa subgra6.m para generar las iteraciones producidas por el método del subgradiente proyectado; tomando como punto inicial  $x_0 = (-5,00225, -5,17455, 0, 2,86355, 0)$ , tenemos la siguiente tabla:

Iteración	$x_k$	$f(x_k)$
0	( -5.0023 , -5.1746 , 0 , 2.8636 , 0 )	129.5758
5	( -1.6512 , -2.6387 , 0.8706 , 1.4057 , -0.3593 )	9.2996
10	( 0.5612 , -0.4397 , 1.5808 , 0.4770 , -0.7828 )	36.4099
20	( 0.6093 , -0.3664 , 1.6028 , 0.4585 , -0.8010 )	21.7065
40	( 0.5825 , -0.3908 , 1.5948 , 0.4699 , -0.7967 )	12.2772
60	( 0.5041 , -0.4624 , 1.5713 , 0.5032 , -0.7839 )	9.6665
80	( -0.1492 , -1.0589 , 1.3752 , 0.7808 , -0.6776 )	8.3154
100	( -0.1115 , -1.0245 , 1.3865 , 0.7648 , -0.6838 )	7.5178
120	( 0.3381 , -0.6140 , 1.5215 , 0.5737 , -0.7569 )	6.9120
140	( 0.3217 , -0.6290 , 1.5165 , 0.5807 , -0.7542 )	6.4271
160	( 0.3072 , -0.6422 , 1.5122 , 0.5869 , -0.7519 )	6.0240
180	( 0.0049 , -0.9182 , 1.4215 , 0.7153 , -0.7027 )	5.6791
200	( 0.0166 , -0.9075 , 1.4250 , 0.7104 , -0.7046 )	5.3770
220	( 0.0274 , -0.8976 , 1.4282 , 0.7058 , -0.7064 )	5.1074
240	( 0.0375 , -0.8884 , 1.4312 , 0.7015 , -0.7080 )	4.8722
260	( 0.0424 , -0.8840 , 1.4327 , 0.6994 , -0.7088 )	4.6749
270	( 0.2548 , -0.6900 , 1.4965 , 0.6091 , -0.7434 )	4.4907
280	( 0.2539 , -0.6909 , 1.4962 , 0.6095 , -0.7432 )	4.3679
297	( 0.0452 , -0.8814 , 1.4336 , 0.6982 , -0.7093 )	4

## Resolviendo desigualdades convexas

Sean  $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, m$  funciones convexas, asumamos que el conjunto  $C = \{x \in \mathbb{R}^n : f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m\}$  es no vacío; es inmediato ver que este conjunto es además convexo y cerrado. Deseamos hallar un  $x^* \in C$ .

Consideremos la función  $f(x) = \max_{i=1:m} f_i(x)$  es claro que esta función es convexa.

Se tiene que si  $x^*$  minimiza el problema  $\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$  entonces  $x^* \in C$  (la recíproca en general, no es cierto). De este modo podemos usar el método subgradiente para aproximarnos al punto óptimo.

Sea  $x \in \mathbb{R}^n \setminus C$  con  $f(x) = f_j(x) > 0$  por el Teorema 2.7 tenemos que  $\partial f_j(x) \subseteq \partial f(x)$  para toda  $j \in I(x)$ . Sugeridos por la observación siguiente y el hecho de que no se conoce el valor óptimo  $f^*$  usaremos pasos aproximados a los de Polyac.

Si  $x^*$  es un punto optimal,  $s \in \partial f(x)$  entonces utilizando la desigualdad del subgradiente tenemos:  $0 \geq f(x^*) \geq f(x) + \langle s, x^* - x \rangle$  así  $x^* \in H = \{z \in \mathbb{R}^n : 0 \geq f(x) + \langle s, z - x \rangle\}$  y  $x \notin H$ , ver Figura (27), así podemos considerar  $y = P_H(x) = x - \frac{\max\{f(x), 0\}}{\|s\|^2} s = x - \frac{f(x)}{\|s\|^2} s$  como un punto más próximo al óptimo, en el caso de que el conjunto factible sea estrictamente factible podemos considerar en analogía a los pasos dados por Polyac, los pasos  $\frac{f(x) + \epsilon}{\|s\|^2}$  para  $\epsilon$  suficientemente pequeño.

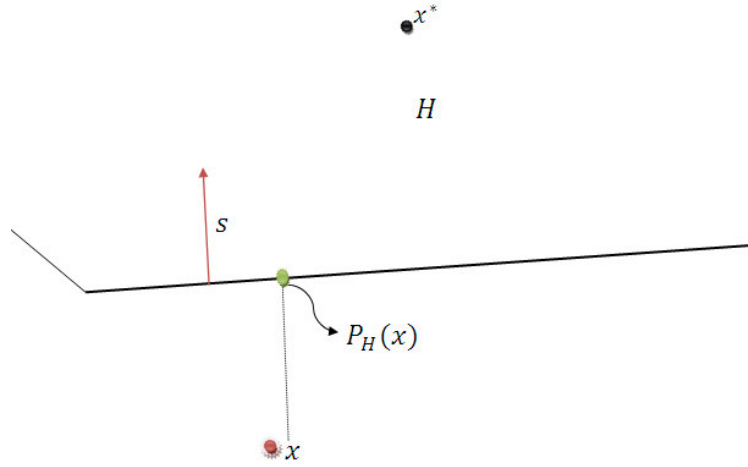


Figura 27: La proyección sobre  $H$  nos da una mejor aproximación al óptimo

### Ejemplo numérico 6

Consideremos el conjunto  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f_i(x, y) \leq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4\}$ , donde  $f_1(x, y) = x^2 + y^2 - 4x + 2$ ,  $f_2(x, y) = x^2 - y - 4$ ,  $f_3(x, y) = (x - 1)^2 + y - 2$ ,  $f_4(x, y) = (x - 2)^4 - (y + 4)$  como estas funciones son convexas, entonces  $C$  es convexo y cerrado; de la Figura 28, se observa que este conjunto es no vacío.

Implementamos en Matlab el programa subgra7.m para poder hallar un punto en el conjunto  $C$ , vemos que el conjunto es estrictamente factible así elegimos los pasos  $\frac{\max\{f(x_k), 0\} + \epsilon}{\|s_k\|^2}$  tomando  $\epsilon = 0,01$  y tomando como punto inicial a  $x_0 = (3, -3)$ ; la tabla siguiente muestra las iteraciones del método.

k	$x_k$
0	(3, -3)
1	(-1.00009, 1.0000)
2	(-0.2732, 1.0067)
3	(0.2415, 1.0177)
4	(0.5647, 1.0325)
5	( 0.7084, 1.0447)
6	(1.0032, 0.8063)
7	(1.0467, 0.7710)
8	(1.0477, 0.7702)
9	( 1.0477, 0.7702)

De donde se observa que en la novena iteración el punto  $x_9 \in C$ .

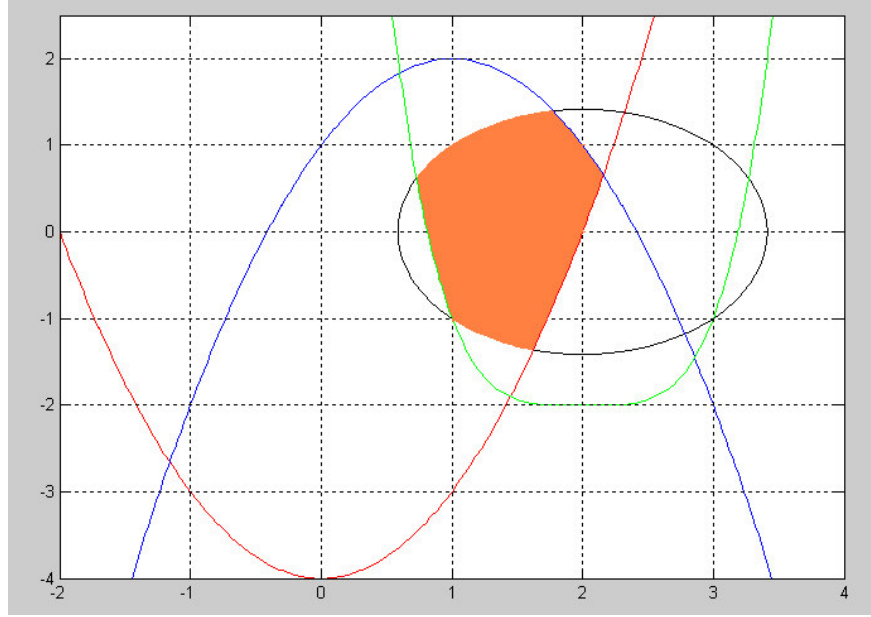


Figura 28: El conjunto C pintado de naranja

### Ejemplo numérico 7

Consideremos el conjunto  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^4 : f_i(x, y) \leq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4\}$ , donde las funciones convexas definidas en  $\mathbb{R}^4$  son  $f_1(x) = -2x_1 - 4x_2 - 5x_3 - x_4$ ,  $f_2(x) = 3x_1 - x_2 + 7x_3 - 2x_4 + 1$ ,  $f_3(x) = -5x_1 - 2x_2 - x_3 - 6x_4 + 15$ ,  $f_4(x) = (x_2 - 2)^2 + (x_1 - 1)^2$  y  $f_5(x) = (x_1 - 2)^4 - (x_2 + 2)$ . Implementamos en Matlab el programa subgra8.m para poder hallar un punto en el conjunto  $C$ ; elegimos los pasos  $\frac{\max\{f(x_k), 0\} + \epsilon}{\|s_k\|^2}$  tomando  $\epsilon = 0,15$  y tomando como punto inicial a  $x_0 = (9, 10, 10, 10)$ ; la tabla siguiente muestra las iteraciones del método.



k	$x_k$	$\max_{i=1,2,3,4} f_i(x_k)$
0	( 0.009000000000 , 0.010000000000, 0.010000000000 , 0.010000000000 )	2.389000000000
1	(0.00725863795 , 0.01000126921 , 0.010000000000 , 0.0100000000000000 )	0.75270224409
2	(0.00596435669 , 0.01000349431 , 0.01000000000000 , 0.0100000000000000 )	0.23499306058
3	(0.00502084560 , 0.01000728020 , 0.01000000000000 , 0.0100000000000000 )	0.07126761920
4	(0.00437321990 , 0.01001315345 , 0.01000000000000 , 0.0100000000000000 )	0.05410650626
5	(0.00178957675 , 0.01087436784 , 0.00397149930 , 0.0117224287704 )	0.00949779929
6	(-0.00257119938 , 0.00811290347 , 0.00397149930 , 0.0117224287704 )	0.42652422041
7	(-0.00145448285 , 0.00811582623 , 0.00397149930 , 0.0117224287704 )	0.13229144545
8	(-0.00065132885 , 0.00812069691 , 0.00397149930 , 0.0117224287704 )	0.03929380205
9	(-0.00012233595 , 0.00812779267 , 0.00397149930 , 0.0117224287704 )	0.01016101500
10	( 0.00014712889 , 0.00813483960 , 0.00397149930 , 0.0117224287704 )	0.00686222872
11	(0.00320656915 , 0.00634122727 , 0.00397149930 , 0.0117224287704 )	0.00921017471
12	(0.00118917465 , 0.00588409351 , 0.00397149930 , 0.0117224287704 )	0.00391988056
13	(-0.00015783923 , 0.00232385472 , 0.00397149930 , 0.0117224287704 )	0.01735699727
14	( 0.00027749780 , 0.00233468672 , 0.00397149930 , 0.0117224287704 )	0.00446848426
15	(0.00050288131 , 0.00234571182 , 0.00397149930 , 0.0117224287704 )	0.00451856971
15	(0.00028056847 , 0.00241981611 , 0.00345276933 , 0.011870637332748 )	0.00432074953
17	(0.00049990783 , 0.00243060314 , 0.00345276933 , 0.011870637332748 )	0.00068069531
18	(0.00091525548 , 0.00201533203 , 0.00345276933 , 0.011870637332748 )	0.00215854509
19	(0.00080532476 , 0.00205197561 , 0.00319626432 , 0.01194392447858 )	0.00008987405
20	(0.0008864254782 , 0.00184367815 , 0.00319626432 , 0.01194392447858 )	0.00030159959
21	(0.0008649207354 , 0.00185084640 , 0.00314608659 , 0.011958260973778 )	-0.00013090719

Donde todas las cifras de la tabla tiene que ser multiplicadas por  $10^3$ .

Se observa que el punto  $x_{21} = (0,8649, 1,8508, 3,1461, 11,9583)$  ya pertenece al conjunto  $C$ .

### Método Subgradiente para optimización con restricciones

El algoritmo del subgradiente puede ser extendido para problemas con restricciones de desigualdad, consideremos el problema :

$$\begin{aligned} &\min f(x) \\ &\text{sujeto } f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

donde las funciones  $f, f_i, i = 1, 2, \dots, m$  son convexas en  $\mathbb{R}^n$  no necesariamente diferenciables y el conjunto  $C = \{x \in \mathbb{R}^n : f_i(x) \leq 0, i = 1, 2, \dots, m\}$  es no vacío, asumimos que el problema anterior tiene solución  $x^*$  y cuyo valor óptimo es  $f^*$ . Planteamos un algoritmo para aproximarnos al valor óptimo en la misma forma que la del método subgradiente, así consideramos el método:

$$x_{k+1} = x_k - l_k s_k, \quad x_0 \in C$$

donde  $s_k$  es un subgradiente de la función objetivo  $f$  o el de una de las restricciones  $f_i$ , esta elección es dada de acuerdo a la siguiente regla :

$$s_k \in \begin{cases} \partial f(x_k) & \text{si } x_k \in C \\ \partial f_i(x_k) & \text{si } f_i(x_k) > 0 \end{cases}$$

a diferencia del método proyectado, en esta versión del método subgradiente podría darse que  $x_k \notin C$  en alguna iteración.

Vamos a probar que existe una subsucesión de  $(f(x_k))$  que converge a  $f^*$ .

Asumamos que el problema es estrictamente factible i.e existe un punto  $x_f$  tal que  $f_i(x_f) < 0$  para  $i = 1, 2, \dots, m$ , asumamos además que existen  $R$  y  $G$  tales que  $\|x_0 - x^*\| \leq R$ ,  $\|x_0 - x_f\| \leq R$ ,  $\|s_k\| \leq G$  y consideremos la sucesión de pasos disminuyentes  $(l_k)$ .

Supongamos que existe  $\epsilon > 0$ , tal que para cada iteración factible  $x_i$  se tenga  $f(x_i) \geq f^* + \epsilon$ , vamos a probar que esto es una contradicción.

Primero hallemos  $\tilde{x} \in C$  y  $\mu > 0$  tales que:

$$f(\tilde{x}) \leq f^* + \frac{\epsilon}{2}, \quad f_m(\tilde{x}) \leq -\mu, \dots, f_1(\tilde{x}) \leq -\mu$$

de este modo  $\tilde{x}$  sería un punto  $\frac{\epsilon}{2}$  suboptimal, satisfaciendo las condiciones de  $C$  con un margen de  $-\mu$ .

Tomemos  $\tilde{x} = (1 - \theta)x^* + \theta x_f$  donde  $\theta \in \langle 0, 1 \rangle$ , luego  $\tilde{x} \in C$ , así tenemos

$$f(\tilde{x}) \leq (1 - \theta)f(x^*) + \theta f(x_f)$$

eligiendo  $\theta < \min \left\{ 1, \frac{\epsilon}{2(f(x_f) - f^*)} \right\}$  se tiene  $f(\tilde{x}) \leq f^* + \frac{\epsilon}{2}$ , por otro lado para cada  $i = 1, 2, \dots, m$  se tiene  $f_i(\tilde{x}) \leq (1 - \theta)f_i(x^*) + \theta f_i(x_f) \leq \theta f_i(x_f) < 0$  así tomamos  $\mu = -\theta \min_{i=1, \dots, m} f_i(x_f)$ .

Sea  $k \in \mathbb{Z}_0^+$  fijo arbitrario consideremos un índice  $i \in \{0, 1, \dots, k\}$  tal que  $x_i$  es factible, entonces tenemos que  $s_i \in \partial f(x_i)$ , y también  $f(x_i) \geq f^* + \epsilon$ . Como  $\tilde{x}$  es  $\frac{\epsilon}{2}$ -suboptimal, tenemos que  $f(x_i) - f(\tilde{x}) \geq \frac{\epsilon}{2}$ , así:

$$\begin{aligned} \|x_{i+1} - \tilde{x}\|^2 &\leq \|x_i - \tilde{x}\|^2 - 2l_i \langle s_i, x_i - \tilde{x} \rangle + l_i^2 \|s_i\|^2 \\ &\leq \|x_i - \tilde{x}\|^2 - 2l_i(f(x_i) - f(\tilde{x})) + l_i^2 \|s_i\|^2 \leq \|x_i - \tilde{x}\|^2 - l_i\epsilon + l_i^2 \|s_i\|^2 \end{aligned}$$

ahora sea  $i \in \{0, 1, \dots, k\}$  tal que  $x_i$  es no factible, entonces  $s_i \in \partial f_j(x_i)$  con  $f_j(x_i) > 0$ . Como  $f_j(\tilde{x}) \leq -\mu$ , así tenemos  $f_j(x_i) - f_j(\tilde{x}) \geq \mu$ . Entonces

$$\begin{aligned} \|x_{i+1} - \tilde{x}\|^2 &\leq \|x_i - \tilde{x}\|^2 - 2l_i \langle s_i, x_i - \tilde{x} \rangle + l_i^2 \|s_i\|^2 \\ &\leq \|x_i - \tilde{x}\|^2 - 2l_i(f_j(x_i) - f_j(\tilde{x})) + l_i^2 \|s_i\|^2 \leq \|x_i - \tilde{x}\|^2 - 2l_i\mu + l_i^2 \|s_i\|^2 \end{aligned}$$

así para toda  $i = 1, \dots, k$  tenemos

$$\|x_{i+1} - \tilde{x}\|^2 \leq \|x_i - \tilde{x}\|^2 - l_i\delta + l_i^2 \|s_i\|^2$$

donde  $\delta = \min \{2\mu, \epsilon\}$  aplicando esta desigualdad recursivamente para  $i = 0, 1, \dots, k$  tenemos:

$$\|x_{k+1} - \tilde{x}\|^2 \leq \|x_0 - \tilde{x}\|^2 - \delta \sum_{i=0}^k l_i + \sum_{i=0}^k l_i^2 \|s_i\|^2$$

se sigue que:

$$\delta \sum_{i=0}^k l_i \leq 9R^2 + G^2 \sum_{i=0}^k l_i^2$$

lo cual no puede ocurrir, puesto que para  $k \rightarrow \infty$  se tiene:

$$\frac{9R^2 + G^2 \sum_{i=0}^k l_i^2}{\sum_{i=0}^k l_i} \rightarrow 0$$

así existen puntos factibles  $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots$  tal que  $f(x_{n_j}) \rightarrow f^*$  si  $j \rightarrow \infty$ .

Definiendo  $g(x_i) = f(x_i)$  para puntos factibles y  $g(x_i) = \infty$  para  $x_i \notin C$  y definimos  $f_k^{mej} = \min \{g(x_i), i = 1, \dots, k\}$  entonces  $f_k^{mej} \rightarrow f^*$  si  $k \rightarrow \infty$ .

### Ejemplo numérico 8

Consideremos las funciones:

$f(x, y) = \max \{3x + 7y + 12, -3x + 7y + 18, -3x - 7y - 10, 3x - 7y - 16\}$ ,  $f_1(x, y) = x - y$ ,  
 $f_2(x, y) = y - 2(x + 3)$ ,  $f_3(x, y) = -\frac{x}{3} - y - 6$ ,  $f_4(x, y) = \frac{x}{5} - y - 6$ . Consideremos el problema de minimización

$$\min_{(x,y) \in C} f(x, y)$$

donde  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f_i(x, y) \leq 0, i = 1, 2, 3, 4\}$ , ver Figura (29); el punto óptimo de este problema es  $(1, -2)$  con valor óptimo  $f^* = 1$ . Nótese que  $f$  es una función convexa no diferenciable en el conjunto  $\{(x, y) : (x - 1)(y + 2) = 0\}$  que tiene intersección no vacía con  $C$ . Implementamos el programa subgra9.m en Matlab para método subgradiente con restricciones. La tabla siguientes muestran las iteraciones tomando como punto inicial a  $x_0 = (-3, -4)$ .

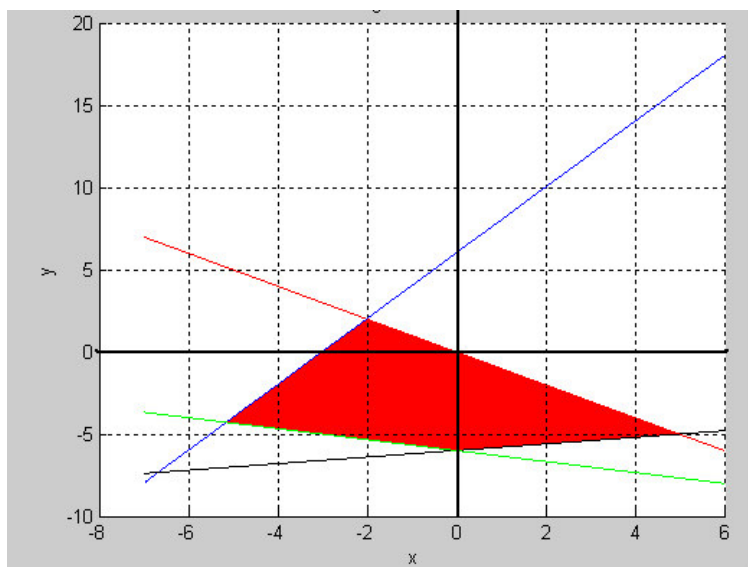


Figura 29: Región factible

k	$x_k$
0	27.0000
1	25.3786
2	18.9341
3	13.1341
4	7.8614
5	5.3427
6	3.7383
7	2.3717
8	1.8655
9	1.7129
10	1.5873
11	1.4822
12	1.3930
13	1.3163
14	1.2496
15	1.2313
16	1.2173
17	1.2056
18	1.1965
19	1.1806
20	1.1672
21	1.1555

### 3.2. El Método de Desviación del Subgradiente

Uno de los comportamiento más importantes en el que se basa el método subgradiente es que en cada una de las iteraciones  $x_k$ ; el vector  $x^* - x_k$  y el opuesto del subgradiente forman un ángulo agudo. Sin embargo, puede darse el caso en que el ángulo formado por la dirección del subgradiente  $s_k$  y  $s_{k+1}$  sea un ángulo obtuso, este fenómeno obviamente puede desacelerar la convergencia del método, la Figura (30) trata de ilustrar tal comportamiento en dos dimensiones.

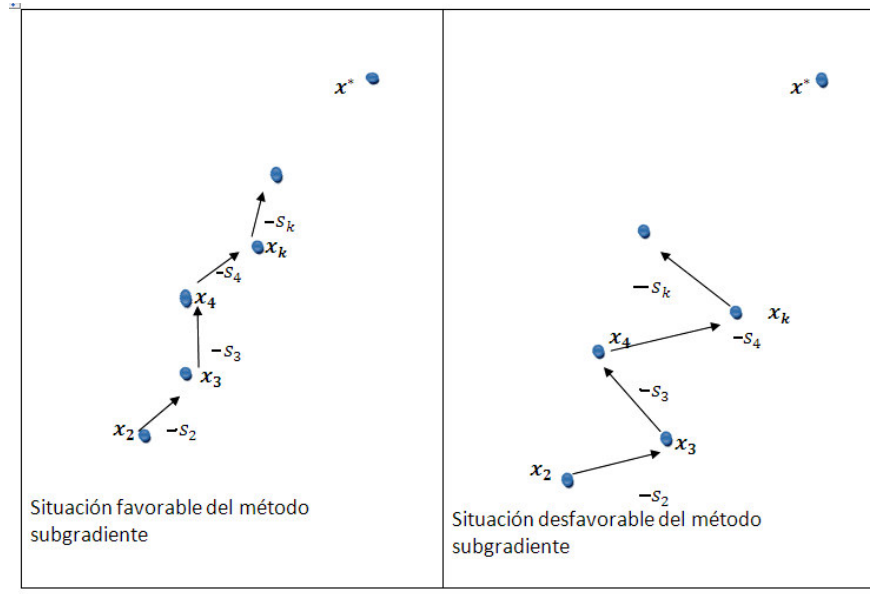


Figura 30: La generación de ángulos obtusos desacelera la convergencia al óptimo

**Definición 3.1** Sean  $l_k > 0$ ,  $d_k \in \mathbb{R}^n$  y consideremos el método iterativo

$$x_{k+1} = P_C(x_k - l_k d_k) \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

diremos que es un método zigzageante de primera especie si existen puntos  $x_k$  y  $x_{k+1}$  en  $C$  tales que el ángulo entre las correspondientes direcciones de paso  $d_k, d_{k+1}$  es obtuso, esto es  $\langle d_k, d_{k+1} \rangle < 0$ .

#### Ejemplo 3.4

Consideremos la función convexa  $\phi(x_1, x_2) = \max \{1 + 2x_1 + x_2, -x_1 + x_2\}$  y  $C = \{(x_1, x_2) : x_2 \geq 0\}$ . Sea  $\Omega_1 = \{(x_1, x_2) : x_1 \geq -\frac{1}{3}\}$  y  $\Omega_2 = \{(x_1, x_2) : x_1 \leq -\frac{1}{3}\}$  entonces  $\phi|_{\Omega_1}(x_1, x_2) = 1 + 2x_1 +$

$x_2$  y  $\phi|_{\Omega_2}(x_1, x_2) = -x_1 + x_2$  así  $\nabla \phi|_{int(\Omega_1)}(x_1, x_2) = (2, 1)$  y  $\nabla \phi|_{int(\Omega_2)}(x_1, x_2) = (-1, 1)$ . Si consideramos el problema  $\min_{(x_1, x_2) \in C} \phi(x_1, x_2)$  se tiene que el valor óptimo es  $\frac{1}{3}$  y se alcanza en el punto  $(-\frac{1}{3}, 0)$ . El comportamiento del método subgradiente aplicado a este problema puede verse en la Figura (31).

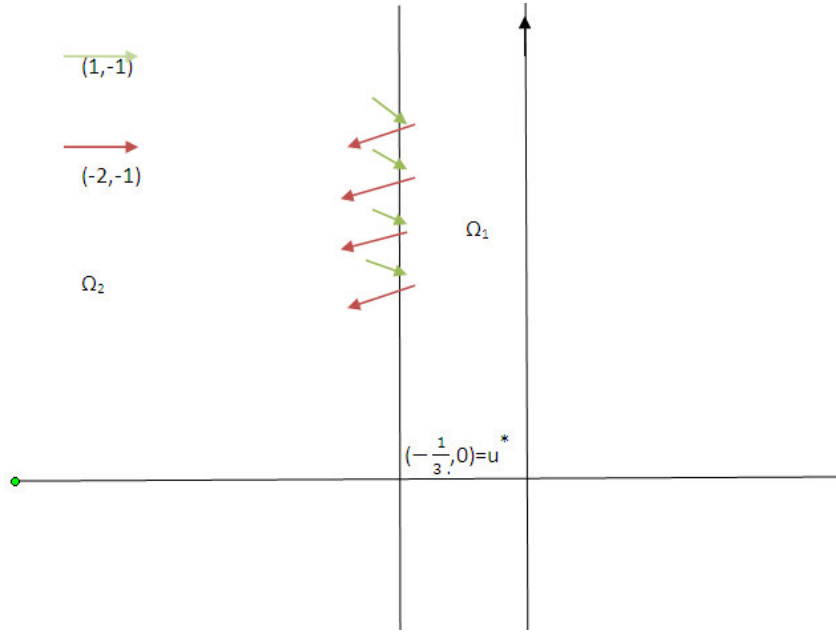


Figura 31:

El fenómeno de zigzagado se puede manifestar en cualquier etapa del método subgradiente, para evitar este comportamiento desfavorable se puede desviar la dirección del subgradiente actual cada vez que forma un ángulo obtuso con la dirección previa dada en el paso anterior y así formar un ángulo agudo o un ángulo agudo más pequeño entre la dirección actual y la dirección precedente y por lo tanto se acelera la velocidad de convergencia. Una modificación del método subgradiente en que la dirección del subgradiente  $s_k$  en la iteración  $x_k$ , es reemplazado por una desviación del subgradiente dada por  $d_k$ , es definida por:

$$d_k = s_k + \delta_k d_{k-1} \quad (21)$$

donde  $s_k \in \partial f(x_k)$  y  $\delta_k \geq 0$  son llamados parámetros de desviación y  $d_{-1} = 0$ , así el método de desviación del subgradiente se mueve en la dirección actual de búsqueda dada por  $d_k$  que es una combinación lineal del subgradiente actual y la dirección usada en el paso anterior. En esta sección consideraremos el método de desviación del subgradiente, mostraremos que las propiedades del método subgradiente usual pueden ser extendidas a este nuevo método, permitiéndonos así eliminar el zigzagado de primera especie producido por el método subgradiente usual.

## Algoritmo del método de desviación del subgradiente

*Paso 0* Inicialización: Elegimos un punto  $x_0 \in C$  y tomemos  $d_{-1} = 0$

*Paso 1* Hallar  $s_k \in \partial f(x_k)$

$$d_k = s_k + \delta_k d_{k-1}$$

$$x_{k+1} = P_C(x_k - l_k d_k)$$

donde los  $\delta_k, l_k$  son dados.

*Paso 2* Si la condición de parada establecida no ocurre ir al paso 1.

Ahora consideraremos algunas propiedades de la dirección del subgradiente desviado  $d_k$  y una forma de determinar los parámetros de desviación  $\delta_k$  así como los pasos  $l_k$ .

**Lema 3.2** Sea  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  convexo y cerrado. Sean  $x \in C$ ,  $v = x - ld$ , con  $d \in \mathbb{R}^n$ ,  $l > 0$ ,  $y = P_C(v)$ ,  $p = y - v$  entonces:

$$i) \langle p, d \rangle \geq 0$$

$$ii) \|x - y\| \leq \|x - v\|$$

### Prueba

La parte *ii*) sigue del Teorema 1.6. Veamos *i*), si  $v \in C$  entonces claramente se da *i*), ahora si  $v \notin C$  tenemos que por el Lema 1.3, que  $\langle x - ld - y, x - y \rangle = \langle v - y, x - y \rangle = \langle -p, -p + ld \rangle = \|p\|^2 - l \langle p, d \rangle \leq 0$  luego  $\langle p, d \rangle \geq 0$ ; ver Figura (32).  $\square$

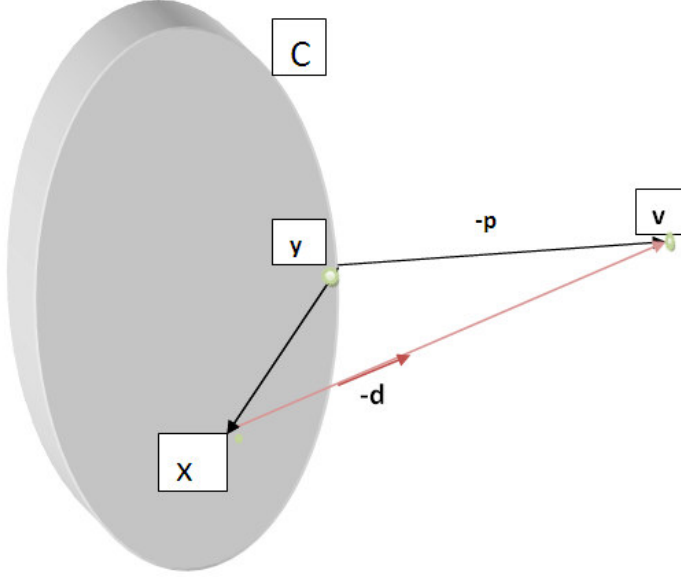


Figura 32:

**Teorema 3.13** Supongamos que  $s_k \in \partial f(x_k)$  y  $d_k$  es dado por  $d_k = s_k + \delta_k d_{k-1}$ . Si  $0 < l_k < \frac{f(x_k) - f^*}{\|d_k\|^2}$  para  $k = 0, 1, 2, \dots$  entonces:

$$\langle d_k, x^* - x_k \rangle \leq \langle s_k, x^* - x_k \rangle \quad \text{para todo } x^* \in C^*.$$

### Prueba

Probaremos por inducción sobre  $k$ . Para  $k = 0$  se da la igualdad puesto que  $d^{-1} = 0$ . Supongamos que la desigualdad se cumple para  $m = k$  esto es:

$$\langle d_k, x^* - x_k \rangle \leq \langle s_k, x^* - x_k \rangle$$

veamos que el resultado es válido para  $m = k + 1$ . Multiplicando por  $x^* - x_{k+1}$  en (21) tenemos:

$$\langle d_{k+1}, x^* - x_{k+1} \rangle = \langle s_{k+1}, x^* - x_{k+1} \rangle + \delta_{k+1} \langle d_k, x^* - x_{k+1} \rangle$$

bastará probar que  $\langle d_k, x^* - x_{k+1} \rangle \leq 0$

Sea  $p_k = P_C(x_k - l_k d_k) - x_k + l_k d_k$  entonces utilizando el Lema 3.1 tenemos:

$$\begin{aligned} \langle d_k, x^* - x_{k+1} \rangle &= \langle d_k, x^* - P_C(x_k - l_k d_k) \rangle = \langle d_k, x^* - x_k + l_k d_k - p_k \rangle \\ &= \langle d_k, x^* - x_k \rangle + l_k \|d_k\|^2 - \langle d_k, p_k \rangle \leq \langle d_k, x^* - x_k \rangle + l_k \|d_k\|^2 \end{aligned}$$

puesto que por el lema  $\langle d_k, p_k \rangle \geq 0$ .

Por otro lado de la hipótesis del teorema, de la hipótesis inductiva y puesto que  $s_k \in \partial f(x_k)$  tenemos que:

$$0 < l_k \|d_k\|^2 \leq f(x_k) - f^* \leq \langle s_k, x_k - x^* \rangle \leq \langle d_k, x_k - x^* \rangle$$



luego  $\langle d_k, x^* - x_k \rangle + l_k \|d_k\|^2 \leq 0$  esto termina la prueba.  $\square$

Las propiedades:

1.  $\langle s_k, x^* - x_k \rangle \leq 0$
2.  $\|x_{k+1} - x^*\| < \|x_k - x^*\|$

La propiedad 1 que se presentaban en el método subgradiente y la propiedad 2 que se presentaba en el método subgradiente al usar los pasos dados por Polyac también ocurren en el método de desviación del subgradiente como muestra el siguiente teorema.

**Teorema 3.14** *Sea  $(x_k)$  la sucesión de iteraciones generada por el método de desviación del subgradiente, bajo las condiciones del teorema anterior se tiene que:*

1.  $\langle d_k, x^* - x_k \rangle \leq 0$
2.  $\|x_{k+1} - x^*\| < \|x_k - x^*\|$ , para todo  $x \in C^*$

### Prueba

La parte 1 sigue del teorema anterior puesto que  $\langle s_k, x^* - x_k \rangle \leq 0$ , veamos la parte 2. Sea  $x \in C^*$  fijo arbitrario tenemos que:

$$\begin{aligned} \|x^* - x_{k+1}\|^2 &= \|x^* - P_C(x_k - l_k d_k)\|^2 \leq \|x^* - x_k + l_k d_k\|^2 \\ &= \|x^* - x_k\|^2 + l_k [l_k \|d_k\|^2 + 2 \langle d_k, x^* - x_k \rangle] \end{aligned}$$

Aplicando la condición sobre los pasos  $l_k$  tenemos :

$$l_k \|d_k\|^2 \leq f(x_k) - f^* < 2(f(x_k) - f^*)$$

ahora usando el hecho de que:  $s_k \in \partial f(x_k)$ , y el teorema anterior tenemos que:

$$l_k \|d_k\|^2 < 2(f(x_k) - f^*) \leq 2 \langle s_k, x_k - x^* \rangle \leq 2 \langle d_k, x_k - x^* \rangle$$

entonces  $l_k \|d_k\|^2 + 2 \langle d_k, x^* - x_k \rangle < 0$  de esto se sigue que:  $\|x_{k+1} - x^*\| < \|x_k - x^*\|$ .  $\square$

El siguiente teorema muestra que para una elección particular de los parámetros de desviación  $\delta_k$ , podemos evitar el fenómeno de zigzag de primera especie.

**Teorema 3.15** Sea  $(x_k)$  la sucesión generada por el método de desviación del subgradiente bajo las condiciones del Teorema 3.13. Sea

$$\delta_k = \begin{cases} -\tau_k \frac{\langle s_k, d_{k-1} \rangle}{\|d_{k-1}\|^2} & \text{si } s_k d_{k-1} < 0 \\ 0 & \text{, otro caso} \end{cases}$$

con  $\tau_k \in \langle 0, 2 \rangle$  entonces:

1.  $\frac{\langle d_k, x^* - x_k \rangle}{\|d_k\|} \leq \frac{\langle s_k, x^* - x_k \rangle}{\|s_k\|}$
2. Si los vectores  $-d_k$ ,  $-s_k$  forman ángulos  $\theta_d^k$ ,  $\theta_s^k$  respectivamente con  $x^* - x_k$  entonces  $0 \leq \theta_d^k \leq \theta_s^k$ .

### Prueba

Veamos 1.

Si  $\langle s_k, d_{k-1} \rangle \geq 0$  entonces  $\delta_k = 0$  entonces  $s_k = d_k$  luego se cumplen 1 y 2 . Consideremos ahora el caso si  $\langle d_{k-1}, s_k \rangle < 0$  en este caso  $\delta_k = -\tau_k \frac{\langle s_k, d_{k-1} \rangle}{\|d_{k-1}\|^2}$ .

Se tiene que:

$$\begin{aligned} \|d_k\|^2 - \|s_k\|^2 &= \|s_k + \delta_k d_{k-1}\|^2 - \|s_k\|^2 = \|s_k\|^2 + 2\delta_k \langle d_{k-1}, s_k \rangle + \delta_k^2 \|d_{k-1}\|^2 - \|s_k\|^2 \\ &= 2\delta_k \langle d_{k-1}, s_k \rangle + \delta_k^2 \|d_{k-1}\|^2 \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} 2\delta_k \langle d_{k-1}, s_k \rangle + \delta_k^2 \|d_{k-1}\|^2 &= \delta_k [2 \langle d_{k-1}, s_k \rangle + \delta_k \|d_{k-1}\|^2] = \delta_k (2 \langle d_{k-1}, s_k \rangle - \tau_k \langle d_{k-1}, s_k \rangle) \\ &= \delta_k (2 - \tau_k) \langle d_{k-1}, s_k \rangle < 0 \end{aligned}$$

entonces  $\|d_k\|^2 \leq \|s_k\|^2$  por tanto  $\frac{1}{\|d_k\|} \geq \frac{1}{\|s_k\|}$ , por el Teorema 3.13 se tiene que  $\langle d_k, x^* - x_k \rangle \leq \langle s_k, x^* - x_k \rangle \leq 0$  luego  $\frac{\langle d_k, x^* - x_k \rangle}{\|d_k\|} \leq \frac{\langle s_k, x^* - x_k \rangle}{\|s_k\|}$ .

Veamos la parte 2. Se tiene que  $\cos(\theta_d^k) = -\frac{\langle d_k, x^* - x_k \rangle}{\|d_k\| \|x^* - x_k\|}$  y  $\cos(\theta_s^k) = -\frac{\langle s_k, x^* - x_k \rangle}{\|s_k\| \|x^* - x_k\|}$  entonces de la parte 1 tenemos  $\cos(\theta_s^k) \leq \cos(\theta_d^k)$  además como  $\theta_s^k$  es agudo entonces  $0 \leq \theta_d^k \leq \theta_s^k \leq 90^\circ$  esto completa la prueba.  $\square$

La Figura (33) muestra el comportamiento del método subgradiente desviado.

El siguiente teorema muestra que para una elección adecuada de los parámetros de desviación  $\delta_k$  se elimina el zigzag de primera especie.

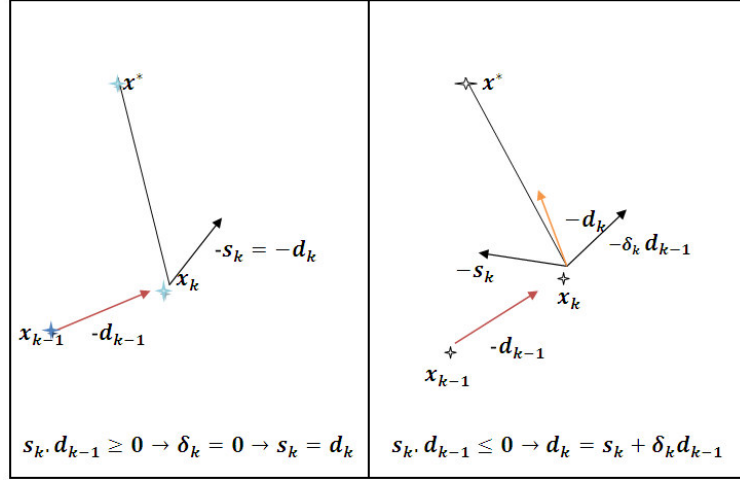


Figura 33:

**Teorema 3.16** *Bajo las condiciones del Teorema 3.15, si  $\tau_k \geq 1$  entonces  $\langle d_k, d_{k-1} \rangle \geq 0$ .*

### Prueba

Si  $\langle s_k, d_{k-1} \rangle \geq 0$  entonces  $s_k = d_k$  entonces  $\langle d_k, d_{k-1} \rangle \geq 0$ .

Si  $\langle s_k, d_{k-1} \rangle < 0$  entonces  $\langle d_k, d_{k-1} \rangle = (s_k + \delta_k d_{k-1}) \cdot d_{k-1} = \langle s_k, d_{k-1} \rangle - \tau_k \langle s_k, d_{k-1} \rangle = (1 - \tau_k) \langle s_k, d_{k-1} \rangle \geq 0. \square$

La importancia del Teorema 3.16 radica en que eligiendo los parámetros de desviación dados en el Teorema 3.15 con  $1 < \tau_k < 2$ , resulta que la dirección actual forma siempre un ángulo agudo con la dirección previa y por lo tanto este método elimina el zigzagado de primera especie dado por el método subgradiente. Nótese que si elegimos  $\tau_k = 1$ , tendríamos que la dirección actual  $d_k$  es perpendicular a la dirección precedente  $d_{k-1}$ . Una elección razonable es  $\tau_k = 1.5$ , esta elección intuitiva está respaldada por experimentos computacionales. Otra posible elección es tomar la dirección de desviación escogiendo la dirección de movimiento que biseca el ángulo entre la dirección actual del subgradiente  $s_k$  y la dirección precedente de movimiento  $d_{k-1}$ , esto se obtiene eligiendo el parámetro de desviación dado por  $\frac{\|s_k\|}{\|d_{k-1}\|}$ .

Además, en lugar de escoger simplemente la dirección bisectora, una combinación convexa del subgradiente actual  $s_k$  y la dirección precedente  $d_{k-1}$  puede ser elegida, esto es:  $d_k = \alpha_k s_k + (1 - \alpha_k) d_{k-1}$ ,  $\alpha_k \in \langle 0, 1 \rangle$ . Si  $\langle s_k, d_{k-1} \rangle \geq 0$  entonces  $\langle d_k, d_{k-1} \rangle \geq 0$  para cualquier  $\alpha_k \in \langle 0, 1 \rangle$ , mientras que si  $\langle s_k, d_{k-1} \rangle < 0$  entonces necesitamos imponer una restricción para  $\alpha_k$  que elimine el zigzagado de primera especie. Se puede ver fácilmente que esto se

da eligiendo  $0 \leq \alpha_k \leq \frac{\|d_{k-1}\|^2}{\|d_{k-1}\|^2 - \langle s_k, d_{k-1} \rangle}$ . Luego en cualquiera de los casos eligiendo  $0 < \alpha_k < \hat{\alpha}_k$  donde  $\hat{\alpha}_k = \min \left\{ 1, \frac{\|d_{k-1}\|}{\|d_{k-1}\|^2 - \langle s_k, d_{k-1} \rangle} \right\}$ , se tiene que:  $\langle d_k, d_{k-1} \rangle \geq 0$  para  $k = 0, 1, 2, \dots$

### Ejemplo numérico 9

Consideremos el Ejemplo 3.4; vamos a comparar el método del subgradiente y el método de desviación del subgradiente. Primero generamos las iteraciones del método subgradiente, tomando los pasos dados por  $l_k = \frac{f(x_k)-f^*}{2\|s_k\|^2}$  y  $l_k = \frac{f(x_k)-f^*}{3\|s_k\|^2}$  y punto inicial  $x_0 = (-0,5, 30)$ ; así tenemos la siguiente tabla:

k	$l_k = \frac{f(x_k)-f^*}{2\ s_k\ ^2}$	$l_k = \frac{f(x_k)-f^*}{3\ s_k\ ^2}$
0	( -0.5000, 30.0000)	(-0.5000 , 30.0000)
10	( 1.5499 , 7.9173 )	(0.0704 , 17.0640 )
20	( 0.3156, 1.9750)	(-0.2115 , 9.4640 )
30	( -0.3475 , 0.6063 )	( -0.2977, 5.2464)
40	(-0.3266 , 0.1485)	(-0.3235 , 2.9076)
50	(-0.3274 , 0.0365 )	(-0.3310 ,1.6112 )
60	(-0.3309, 0.0091)	(-0.3330 , 0.8927)
80	(-0.3333 , 0.0007 )	(-0.3407 , 0.2752 )
90	(-0.3333, 0.0002)	( -0.3124 , 0.1263)
98	(-0.3333 , 0.0001 )	(-0.3285 , 0.0888)
99	(-0.3333, 0.0001)	( -0.3328 , 0.0866)
100	(-0.3333 ,0.0000 )	( -0.3367 ,0.0846 )

Ahora implementamos en Matlab el programa subgra10.m para generar las iteraciones del método de desviación subgradiente para el Ejemplo 3.4, eligiendo los mismos pasos y el mismo punto inicial tenemos:

k	$l_k = \frac{f(x_k)-f^*}{2\ s_k\ ^2}$	$l_k = \frac{f(x_k)-f^*}{3\ s_k\ ^2}$
0	( -0.5000, 30.0000)	(-0.5000 , 30.0000)
10	( 0.2054 , 1.6405 )	( -1.1823 , 6.2550 )
20	( -0.3423 , 0.0715 )	( -0.2103 , 0.8467 )
30	( -0.3326 , 0.0024 )	( -0.3487 , 0.1469 )
35	( -0.3333 , 0.0004 )	( -0.3347 , 0.0515)
39	( -0.3333 , 0.0001)	(-0.3338 , 0.0244 )
40	( -0.3333 , 0.0001)	( -0.3322 , 0.0168)
41	( -0.3333 , 0.0001 )	( -0.3347 , 0.0155)
42	(-0.3333 , 0.0000)	( -0.3335 , 0.0115)

Los resultados muestran que el punto óptimo se encuentra en menos iteraciones con el método de desviación subgradiente, que con el método subgradiente usual.

### 3.3. El Método Condicional del Subgradiente

El método condicional subgradiente es un método iterativo que puede controlar un zigzagado de segunda especie que el método del subgradiente produce y no puede ser controlado por el método de desviación del subgradiente. Recordemos que el método de desviación del subgradiente, puede controlar un fenómeno de zigzagado sólo en el caso que el zigzagado es creado debido a la formación de un ángulo obtuso entre la dirección actual del subgradiente y la dirección previa de movimiento. En algún caso, sin embargo, aunque el ángulo entre la dirección del subgradiente  $s_k$  y la dirección del movimiento previo  $d_{k-1}$  sea agudo, es posible que  $s_k$  sea casi perpendicular a la frontera de la región factible para  $x_k \in Fr(C)$ , podría darse el caso que la proyección de  $x_k - l_k s_k$  a la región factible ocurra en un punto próximo a  $x_k$ , en tal situación, los puntos de la sucesión pueden estar casi inalterados o no pueden tener un cambio significativo, a consecuencia de esto, el método puede volverse lento. El siguiente ejemplo ilustra la convergencia lenta del método subgradiente y del método de desviación del subgradiente.

#### Ejemplo 3.5

Sea  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 1 - x \leq y \leq 1\}$  que es un conjunto convexo y cerrado y la función  $f(x, y) = x + 2y - 1$ . Consideremos el problema  $\min_{(x,y) \in C} f(x, y)$ , cuya solución óptima es  $x^* = (1, 0)$ , con valor óptimo  $f^* = 0$ , aplicamos el método subgradiente tomando como punto inicial a  $x_0 = (0, 1)$ , nótese que  $s_k = (1, 2)$  para  $k = 0, 1, \dots$  y tomemos los pasos dados por Polyac  $l_k = \frac{f(x_k)}{5}$ , si  $x_k = (x_k^1, x_k^2) \in C \setminus \{x^*\}$  se tiene que  $0 < l_k$ . Por otra parte, si  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  entonces su proyección perpendicular  $(a, b)$  a la recta  $x + y = 1$  esta dada por:

$$a = \frac{x - y + 1}{2}, \quad b = \frac{1 - x + y}{2}$$

Sea

$$\tilde{x}_{k+1} = x_k - l_k s_k = (x_k^1, x_k^2) - \left(\frac{x_k^1 + 2x_k^2 - 1}{5}\right)(1, 2)$$

luego la iteración  $k + 1$  del método subgradiente es dada por:

$$x_{k+1} = P_C(x_k - l_k s_k) = P_C(\tilde{x}_{k+1}) \quad k = 0, 1, \dots$$

como  $x_0 \in Fr(C)$  entonces  $x_k = (x_k^1, x_k^2) \in Fr(C)$  para  $k = 0, 1, \dots$  así se tiene que  $\tilde{x}_{k+1} = (1 - \frac{6x_k^2}{5}, \frac{3x_k^2}{5})$ . Es inmediato ver que  $\tilde{x}_{k+1}$  se encuentra entre las rectas perpendiculares a

$x + y = 1$  que pasan por  $(0, 1)$  y  $(1, 0)$  y en el semiespacio positivo determinado por esta recta.

Así  $x_{k+1} = P_C(\tilde{x}_{k+1}) = (1 - \frac{9x_k^2}{10}, \frac{9x_k^2}{10})$  de donde deducimos que:

$$x_k = (1 - \left(\frac{9}{10}\right)^k, \left(\frac{9}{10}\right)^k) \quad k = 0, 1, \dots$$

así  $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = (1, 0)$ .

La Figura (34) muestra el comportamiento de las iteraciones del método subgradiente.

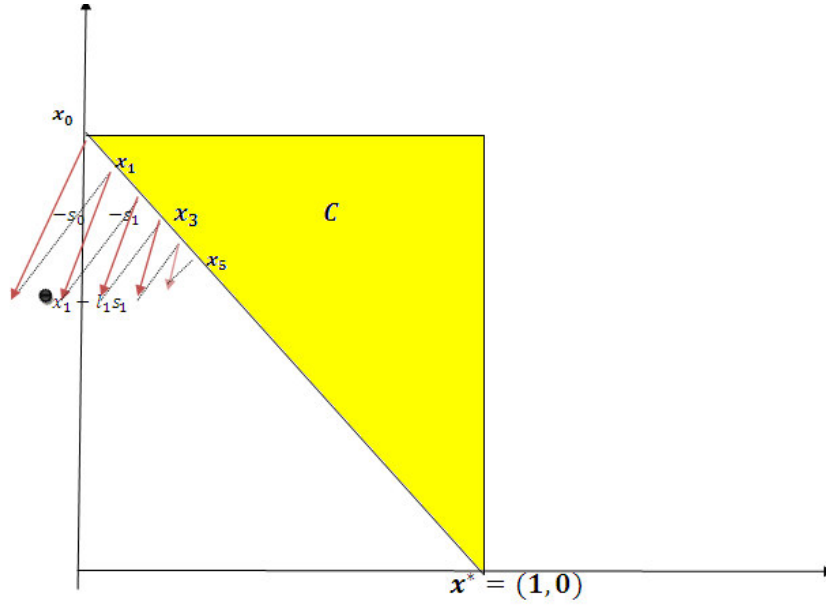


Figura 34:

El fenómeno del zigzagado en este ejemplo es debido al hecho de que los subgradientes son casi perpendiculares a la frontera del conjunto. Tal zigzagado es llamado zigzagado de segunda especie. Daremos una definición formal del zigzagado de segunda especie después de la siguiente definición

**Definición 3.2** El cono normal a  $C$  en  $x \in C$ , es el conjunto:

$$N_C(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, z - x \rangle \leq 0, \forall z \in C\}$$

los elementos de  $N_C(x)$  son llamados vectores normales de  $C$  en  $x$ .

Se puede observar que  $N_C(x)$  es un cono cerrado, conteniendo a  $T^*(x, C)$ , el cono polar de  $T(x, C)$ .

**Teorema 3.17** Sea  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  un conjunto convexo y  $x \in C$  entonces

$$T^*(x, C) = N_C(x), \quad N_C^*(x) = T(x, C).$$

**Prueba.** Ver [1].

Bajo las condiciones del teorema anterior  $N_C(x)$  y  $T_C(x)$  es convexos. Se tiene además que  $N_C(x) \cap T(x, C) = \{0\}$ , nótese que si  $x \in \text{int}(C)$  entonces  $N_C(x) = \{0\}$ . Si  $z \in C$  entonces  $z - x \in T(x, C)$  puesto que  $\langle y, z - x \rangle \leq 0$  para toda  $y \in N_C(x)$  entonces  $C - \{x\} \subseteq T(x, C)$ .

### Ejemplo 3.6

Consideremos el triángulo  $C = \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq 1; 0 \leq x_2 \leq x_1\}$  y tomemos  $x = (0, 0)$  entonces  $T_C(x)$ ,  $N_C(x)$  se muestran en la Figura (35).

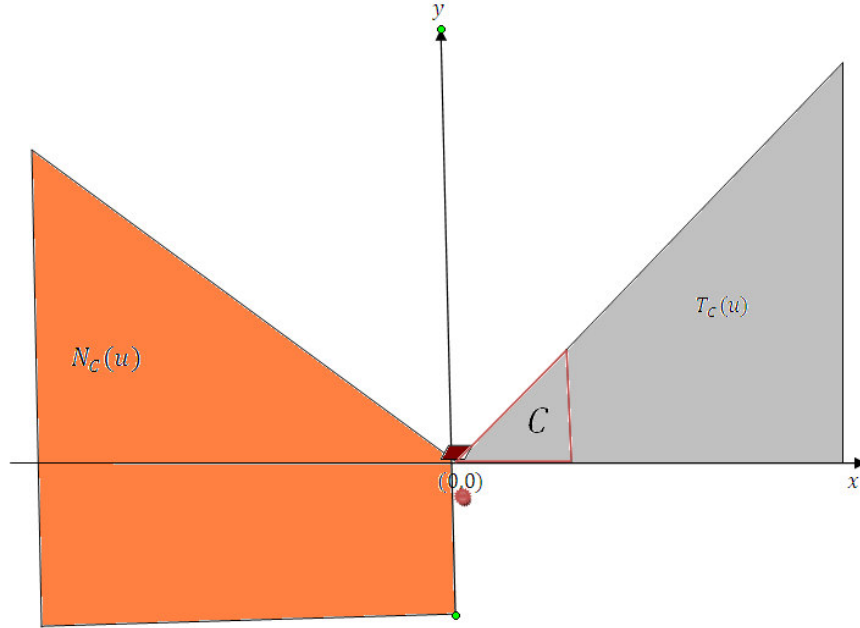


Figura 35:

**Definición 3.3** Dado  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  convexo y cerrado, sea  $l_k > 0$ ,  $d_k \in \mathbb{R}^n$  definimos el método iterativo :

$$x_{k+1} = P_C(x_k - l_k d_k)$$

diremos que se forma un zigzag de segunda especie si y sólo si para dos o más iteraciones consecutivas  $x_k, x_{k+1}$  existen vectores  $v \in N_C(x_k)$  y  $w \in N_C(x_{k+1})$  tales que:

$$\langle d_k, v \rangle < 0 \quad y \quad \langle d_{k+1}, w \rangle < 0. \quad (22)$$

Es claro que el zigzag de segunda especie solo puede ocurrir en la frontera de la región, pues si  $x_k$  estuviera en el interior de la región entonces se tendría que  $N_C(x_k) = \{0\}$  y no se cumpliría (22).

En el Ejemplo 3.5 considerando el método subgradiente, la condición anterior es satisfecha, en efecto si  $x_k$  se encuentra en el segmento de extremos  $(0, 1)$  y  $(1, 0)$ , se tiene que  $N_C(x_k) = \{t(-1, -1) : t \geq 0\}$  y  $d_k = (1, 2)$  para toda  $k = 0, 1, \dots$  luego (21) es válido.

Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función convexa, no necesariamente diferenciable. Sea  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  no vacío, convexo y cerrado. Consideremos el problema convexo con restricciones (PCR) dado por :

$$PCR : \min_{x \in C} f(x)$$

Asumamos que el conjunto optimal  $C^* = \{x \in C : f(x) = f^*\}$  es no vacío; es inmediato verificar que este conjunto es además convexo y cerrado.

En las definiciones de subgradiente y subdiferencial dadas en las secciones anteriores, no ha sido considerada la región factible; Dema'yanov y Shomesova generalizan la definición de subdiferencial y subgradiente tomándola en cuenta.

**Definición 3.4** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función convexa,  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  convexo y cerrado. El subdiferencial condicional de  $f$  en  $x \in C$  es:

$$\partial^C f(x) = \{\tilde{s} \in \mathbb{R}^n : f(z) \geq f(x) + \langle \tilde{s}, z - x \rangle, \quad \forall z \in C\}$$

Un elemento  $\tilde{s} \in \partial^C f(x)$  es llamado un subgradiente condicional de  $f$  en  $x$ .

### Observación 3.8

El subgradiente condicional y el subgradiente son idénticos en el interior de  $C$  pero ese no es el caso en la frontera. En la Figura (36) se tiene que  $\tilde{s}_a$  es un subgradiente condicional de  $f$  en  $a$  considerando  $C = [a, b]$ . Nótese que  $s_a$  es el único subgradiente de  $f$  en  $a$ , mientras que existen muchos subgradientes condicionales de  $f$  en  $a$ , además de  $\tilde{s}_a$ , de igual forma  $\tilde{s}_b$  es un subgradiente condicional de  $f$  en  $b$ .



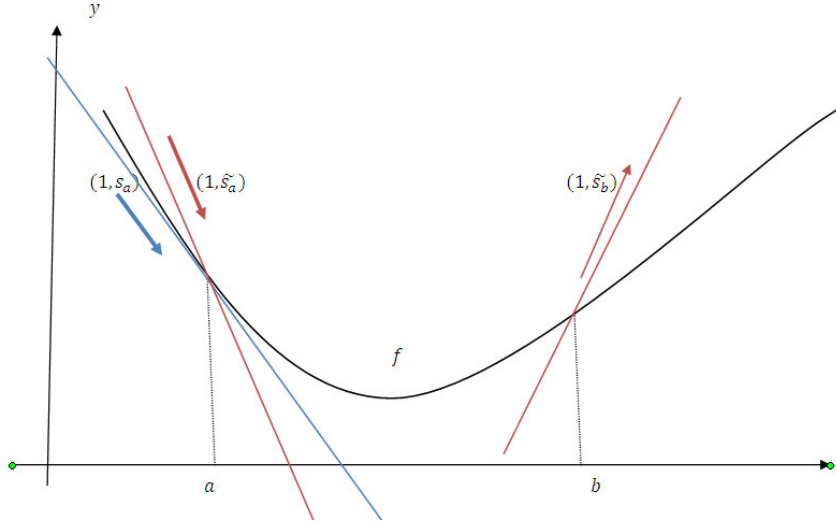


Figura 36:

Se observa que el subdiferencial condicional no depende únicamente de la función, si no también del conjunto de interés  $C$ . Claramente de la definición se tiene que  $\partial f(x) \subseteq \partial^C f(x)$ , de este modo  $\partial^C f(x)$  es no vacío. La prueba del siguiente teorema es inmediata a partir de la definición de subdiferencial condicional.

**Teorema 3.18** *Se cumple que  $\partial^C f(x)$  es no vacío, convexo y cerrado.*

### Prueba

Se deduce de inmediato de la definición de subdiferencial condicional y de la observación anterior.  $\square$

De las definiciones anteriores, obtenemos las condiciones de optimalidad para el PCR.

**Teorema 3.19** *(Condiciones de optimalidad) Sea  $C^*$  el conjunto optimal del problema PCR, se tiene:*

1.  $\bar{x} \in C^* \Leftrightarrow 0 \in \partial^C f(\bar{x})$
2.  $\bar{x} \in C^* \Leftrightarrow \partial f(\bar{x}) \cap (-N_C(\bar{x})) \neq \emptyset$

### Prueba

La prueba de 1 sigue fácilmente de la definición de subdiferencial condicional.

Veamos 2

Sea  $\bar{x} \in C^*$  y  $d \in T(\bar{x}, C) \setminus \{0\}$ . Luego existen sucesiones  $(l_k) \subset \mathbb{R}^+$  y  $(d_k) \subset \mathbb{R}^n$  tales que  $d_k \rightarrow d$ ,  $l_k \rightarrow 0$  y  $\bar{x} + l_k d_k \in C$  para  $k = 0, 1, \dots$

Para toda  $k$  tenemos

$$0 \leq \frac{f(\bar{x} + l_k d_k) - f(\bar{x})}{l_k}$$

luego por el Teorema 2.1 tenemos

$$f'(\bar{x}, d) \geq 0, \text{ para toda } d \in T(\bar{x}, C) \quad (23)$$

Supongamos que  $\partial f(\bar{x}) \cap (-N_C(\bar{x})) = \emptyset$ , por el Teorema 1.10 (teorema de separación estricta), existen  $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  y  $c \in \mathbb{R}$  tal que

$$\langle a, y \rangle > c > -\langle a, d \rangle \quad \forall y \in \partial f(\bar{x}), \forall d \in N_C(\bar{x}) \quad (24)$$

Como  $0 \in N_C(\bar{x})$  entonces  $c > 0$ , así  $\langle -a, y \rangle < -c < 0$  para toda  $y \in \partial f(\bar{x})$  entonces por el Teorema 2.2 tenemos

$$f'(\bar{x}, -a) = \max_{y \in \partial f(\bar{x})} \langle -a, y \rangle < 0$$

Si se tendría  $\langle -a, d \rangle > 0$  para algún  $d \in N_C(\bar{x})$ ; tomando  $td \in N_C(\bar{x})$ ,  $t > 0$  y pasando al límite cuando  $t \rightarrow \infty$  en (24), resulta una contradicción pues  $c$  es fijo, luego se tiene  $\langle -a, d \rangle \leq 0$  para todo  $d \in N_C(\bar{x})$  se concluye entonces que  $-a \in (N_C(\bar{x}))^* = T_C(\bar{x})$  y esto es una contradicción con (23).

Supongamos ahora que  $\partial f(\bar{x}) \cap (-N_C(\bar{x})) \neq \emptyset$  entonces existe  $s \in \partial f(\bar{x})$  y  $\langle -s, x - \bar{x} \rangle \leq 0$ , para toda  $x \in C$ , como  $s \in \partial f(\bar{x})$  entonces  $s \in \partial^C f(\bar{x})$  luego

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + \langle s, x - \bar{x} \rangle \geq f(\bar{x}), \quad \text{para toda } x \in C$$

así  $\bar{x} \in C^*$ .  $\square$

**Teorema 3.20** (*Caracterización del subdiferencial condicional*)

$$\partial^C f(x) = \partial f(x) + N_C(x)$$

**Prueba**

Sea  $v \in \partial^C f(x)$  entonces  $f(z) \geq f(x) + \langle v, z - x \rangle$ , para toda  $z \in C$ . Definimos la función auxiliar  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $h(z) = f(z) - f(x) - \langle v, z - x \rangle$ . Se tiene que  $h$  es convexa, además  $h(z) \geq 0$ , para toda  $z \in C$  y  $h(x) = 0$ , aplicamos las condiciones de optimalidad del Teorema 3.19 al problema  $\min_{z \in C} h(z)$ . Tenemos que  $\partial h(x) \cap (-N_C(x)) \neq \emptyset$  además de la definición de  $h$  tenemos que  $\partial h(x) = \partial f(x) - \{v\}$  entonces existe  $s \in \partial f(x)$ , tal que  $s - v \in -N_C(x)$  de donde  $-n = s - v$  para algún  $n \in N_C(x)$ , luego  $v = s + n \in \partial f(x) + N_C(x)$ , esto prueba la primera inclusión.

Ahora sea  $v = v_1 + v_2$  con  $v_1 \in \partial f(x)$  y  $v_2 \in N_C(x)$  entonces  $f(z) \geq f(x) + \langle v_1, z - x \rangle$ , para

toda  $z \in \mathbb{R}^n$  y  $\langle v_2, z - x \rangle \leq 0$ , para toda  $z \in C$  sumando ambas desigualdades tenemos que:  $f(z) \geq f(x) + \langle v_1 + v_2, z - x \rangle$ , para toda  $z \in C$  entonces  $v \in \partial^C f(x)$ .  $\square$

Nótese que si  $x \in \text{int}(C)$  entonces  $N_C(x) = \{0\}$  y así  $\partial^C f(x) = \partial f(x)$ .

### Algoritmo subgradiente condicional

Sea  $\tilde{s} \in \partial^C f(x)$  un subgradiente condicional de  $f$  en  $x \in C$ . El método subgradiente condicional es un procedimiento iterativo en el que dado un  $x_0 \in C$  generamos una sucesión de iteraciones  $(x_k)$  dada por:

$$x_{k+1} = P_C(x_k - l_k \tilde{s}_k) \quad k = 0, 1, \dots \quad (25)$$

para aproximarnos al óptimo del PCR, donde  $\tilde{s}_k = s_k + v_k$  con  $s_k \in \partial f(x_k)$ ,  $v_k \in N_C(x_k)$  y los  $l_k$  son elegidos de acuerdo algún criterio que permita la convergencia del método.

Veremos que el método condicional subgradiente puede aliviar en cierta medida el posible zigzagado de segunda especie que el método del subgradiente produce y no puede ser evitado por el método de desviación subgradiente.

Dos propiedades importantes del método del subgradiente son heredadas por este nuevo algoritmo.

Si  $x^* \in C^*$  es un punto óptimo y  $f(x^*) = f^*$  entonces:

1.  $\langle \tilde{s}_k, x_k - x^* \rangle > 0$ , siempre que  $x_k$  no sea optimal.
2. Si  $0 < l_k < \frac{2(f(x_k) - f^*)}{\|\tilde{s}_k\|^2}$  entonces  $\|x_{k+1} - x^*\| < \|x_k - x^*\|$  para  $k = 0, 1, \dots$

La demostración de 1 es inmediata a partir del hecho de que  $\langle \tilde{s}_k, x_k - x^* \rangle \geq f(x_k) - f^* > 0$  mientras que 2 es similar al Teorema 3.9 substituyendo  $\tilde{s}_k$  por  $s_k$ .

El siguiente teorema establece la convergencia de la sucesión generada por el método subgradiente condicional, para una cierta elección de la sucesión de tamaños de paso  $(l_k)$ .

**Teorema 3.21** *Sea  $(x_k)$  la sucesión de iteraciones generadas por el método subgradiente*

condicional dado en (25), con los pasos satisfaciendo:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} l_k = 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} l_k = \infty \quad y \quad \sum_{k=0}^{\infty} l_k^2 < \infty$$

Si  $(\tilde{s}_k)$  es acotada, entonces  $(x_k)$  converge a un elemento de  $C^*$ .

### Prueba

Sea  $x^* \in C$  y  $k = 0, 1, \dots$  tenemos que:

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - x^*\|^2 &= \|P_C(x_k - l_k \tilde{s}_k) - x^*\|^2 \leq \|x_k - l_k \tilde{s}_k - x^*\|^2 \\ &= \|x_k - x^*\|^2 - 2l_k \langle \tilde{s}_k, x_k - x^* \rangle + l_k^2 \|\tilde{s}_k\|^2 \end{aligned}$$

usando repetidas veces esta última desigualdad se tiene que para cada  $k = 0, 1, \dots$

$$\|x_k - x^*\|^2 \leq \|x_0 - x^*\|^2 - 2 \sum_{j=0}^{k-1} l_j \langle \tilde{s}_j, x_j - x^* \rangle + \sum_{j=0}^{k-1} l_j^2 \|\tilde{s}_j\|^2 \quad (26)$$

puesto que  $\langle \tilde{s}_j, x_j - x^* \rangle \geq 0$  para toda  $j = 0, 1, \dots$  obtenemos de (26) que

$$\|x_k - x^*\|^2 \leq \|x_0 - x^*\|^2 + \sum_{j=0}^{k-1} l_j^2 \|\tilde{s}_j\|^2 \quad (27)$$

Sea  $M = \sup_k \{\|\tilde{s}_k\|\}$  y  $\sum_{k=0}^{\infty} l_k^2 = l$  entonces de esta última desigualdad obtenemos:

$$\|x_k - x^*\|^2 \leq \|x_0 - x^*\|^2 + lM^2$$

de aquí se sigue que  $(x_k)$  es acotada.

Supongamos que no exista una subsucesión  $(x_t)$  de  $(x_k)$  tal que  $\langle \tilde{s}_t, x_t - x^* \rangle \rightarrow 0$  entonces existe un  $\delta > 0$  y  $K \in \mathbb{N}$  tal que  $\langle \tilde{s}_k, x_k - x^* \rangle \geq \delta$  para  $k \geq K$ , esto junto a la condición de que  $\sum_{k=0}^{\infty} l_k = \infty$  implica que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{k-1} l_j \langle \tilde{s}_j, x_j - x^* \rangle = \infty$$

además

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{k-1} l_j^2 \|\tilde{s}_j\|^2 \leq M^2 \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{k-1} l_j^2 < \infty$$

así tenemos de (27) que  $\|x_t - x^*\| \rightarrow -\infty$  lo cual es absurdo; luego la sucesión  $(x_k)$  contiene una subsucesión  $(x_t)$  tal que  $\langle \tilde{s}_t, x_t - x^* \rangle \rightarrow 0$  se sigue de la definición de subgradiente

condicional que  $f(x_t) \rightarrow f^*$ . Además como  $(x_t)$  es acotada entonces tiene un punto límite, digamos  $\bar{x}$ . De la continuidad se sigue que  $f(\bar{x}) = f^*$  entonces  $\bar{x} \in C^*$ . Ahora mostraremos que la sucesión  $(x_k)$  converge a  $\bar{x}$ .

Sea  $\epsilon > 0$  arbitrario entonces existe  $N > 0$  tal que  $\|x_N - \bar{x}\| < \sqrt{\frac{\epsilon}{2}}$  y  $\sum_{j=N}^{\infty} l_j^2 < \frac{\epsilon}{2M^2}$  de (27) se tiene que para toda  $k > N$ :

$$\|x_k - \bar{x}\|^2 \leq \|x_N - \bar{x}\|^2 + \sum_{j=N}^{k-1} l_j^2 \|\tilde{s}_j\|^2 < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon M^2}{2M^2} = \epsilon$$

esto prueba el teorema.  $\square$

Si elegimos los pasos dados por Polyac (item 7 pag. 65) y además asumimos que  $(\tilde{s}_k)$  es acotada, entonces también ocurre que  $f(x_k) \rightarrow f^*$ , la justificación de este resultado es similar a la del Teorema 3.10.

La acotación de  $(\tilde{s}_k)$  puede obtenerse por ejemplo, a partir de la acotación de  $(s_k)$  y eligiendo los  $v_k \in N_C(x_k)$  como:

$$v_k = P_{N_C(x_k)}(s_k), \quad s_k \in \partial f(x_k) \quad (28)$$

como  $(s_k)$  es acotada y  $P_C$  es continua, entonces  $(v_k)$  es acotada, luego  $(\tilde{s}_k)$  es acotada.

El siguiente corolario permite ampliar la elección de los pasos que satisfacen la condición del teorema anterior.

**Colorario 3.3** *Sea  $(\eta_k)$  una sucesión arbitraria de tamaños de pasos. Si existen sucesiones  $(\bar{l}_k)$  y  $(\underline{l}_k)$  satisfaciendo las condiciones del Teorema 3.21 y  $\underline{l}_k \leq \eta_k \leq \bar{l}_k$  entonces el resultado del teorema también es válido usando los pasos  $\eta_k$ .*

## Prueba

La prueba es inmediata puesto que la sucesión  $(\eta_k)$  bajo las condiciones dadas también satisface las condiciones del Teorema 3.21.  $\square$

## Ejemplo 3.7

Ahora mostraremos el efecto del método condicional subgradiente aplicado al Ejemplo 3.5. Tomamos los pasos  $l_k = \frac{1}{k+1}$ ,  $x_0 = (0, 1)$  y  $(v_{k+1})$  como en (28). Tenemos que el cono normal en  $(0, 1)$  es dado por  $N_C(0, 1) = \{(x, y) : x \leq 0, x \leq y\}$  y el subgradiente es dado por  $s_0 = (1, 2)$  calculamos  $v_0 = P_{N_C(0,1)}((1, 2)) = (0, 2)$  luego  $\tilde{s}_0 = (1, 2) + (0, 2) = (1, 4)$ , luego  $x_1 = P_C((0, 1) - (1, 4)) = P_C(-1, -3) = (1, 0)$ , luego el punto óptimo se alcanza en una sola iteración.

Notamos que la elección de  $v_k$  es fundamental, pues una elección arbitraria puede no eliminar el zigzagado de segunda especie.

# CAPITULO IV

## 4. Un Algoritmo Para Problemas de Desigualdad Variacional

### 4.1. Introducción y Preliminares

Sea  $C$  un conjunto convexo cerrado no vacío de  $\mathbb{R}^n$  y  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow P(\mathbb{R}^n)$  un operador punto conjunto, donde  $P(\mathbb{R}^n)$  es el conjunto de partes de  $\mathbb{R}^n$ . El problema de desigualdad variacional para  $T$  y  $C$ , denotado por  $PDV(T, C)$ , es definido como:

Hallar  $x^* \in C$  y  $u^* \in T(x^*)$  satisfaciendo

$$\langle u^*, x - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall x \in C. \quad (29)$$

El conjunto solución de este problema será denotado por  $S(T, C)$ .

Existen muchos problemas que pueden ser escritos como problemas de desigualdad variacional, entre algunos de ellos tenemos los siguientes.

#### **Ejemplo 4.1** (*Optimización convexa*)

Cuando  $T$  es el subdiferencial de una función convexa, entonces  $PDV(T, C)$  es equivalente al de minimizar  $f$  sobre  $C$ . Esto se deduce de inmediato del Teorema 2.12.  $\square$

#### **Ejemplo 4.2** (*Problemas de complementariedad*)

Cuando  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow P(\mathbb{R}^n)$  y  $C = \mathbb{R}_+^n$  el problema de desigualdad variacional es equivalente al problema complementario no lineal denotado por  $PC(T, \mathbb{R}_+^n)$ , que consiste en hallar  $x^* \in \mathbb{R}_+^n$  y  $u^* \in T(x^*)$  tal que  $u^* \in \mathbb{R}_+^n$  y  $\langle u^*, x^* \rangle = 0$ .

En efecto; primero supongamos que  $x^* \in S(T, \mathbb{R}_+^n)$ , tomando  $x = 0 \in \mathbb{R}_+^n$  en (29) obtenemos que existe  $u^* \in T(x^*)$  tal que  $\langle u^*, x^* \rangle \leq 0$ . Además como  $x^* \in \mathbb{R}_+^n$  se sigue que  $2x^* \in \mathbb{R}_+^n$  entonces tomando  $x = 2x^*$  en (29), obtenemos  $\langle u^*, x^* \rangle \geq 0$ , de donde  $\langle u^*, x^* \rangle = 0$  y de esto tenemos  $\langle u^*, x \rangle \geq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}_+^n$  y entonces  $u^* \in \mathbb{R}_+^n$ , luego  $x^*$  resuelve  $PC(T, \mathbb{R}_+^n)$ . Recíprocamente, si  $x^*$  resuelve  $PC(T, \mathbb{R}_+^n)$  entonces  $\langle u^*, x - x^* \rangle = \langle u^*, x \rangle \geq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}_+^n$  puesto que  $u^* \in \mathbb{R}_+^n$  luego tenemos que  $x^* \in S(T, C)$ .

#### **Ejemplo 4.3** (*Hallando ceros de operadores*)

El problema de desigualdad variacional  $PDV(T, C)$  es equivalente al problema de hallar un cero de  $\hat{T} = T + N_C$ , i.e hallar  $x^* \in \mathbb{R}^n$  tal que  $0 \in \hat{T}(x^*) = T(x^*) + N_C(x^*)$ . En efecto sea  $x^* \in S(T, C)$  si y solo si existe  $u^* \in T(x^*)$  tal que  $\langle u^*, x - x^* \rangle \geq 0$  para todo  $x \in C$  esto implica que  $-u^* \in N_C(x^*)$ , i.e  $0 \in T(x^*) + N_C(x^*) = \hat{T}(x^*)$ .  $\square$

#### **Ejemplo 4.4** (*Problemas de punto silla con restricciones*)

Sean  $C_1 \subseteq \mathbb{R}^n$  y  $C_2 \subseteq \mathbb{R}^m$  conjuntos convexos y cerrados. Dada  $L : C_1 \times C_2 \rightarrow \mathbb{R}$ , convexa en el primer argumento y concava en el segundo argumento, el operador punto silla  $T_L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow P(\mathbb{R}^n) \times P(\mathbb{R}^m)$  es definido como

$$T_L(x, y) = (\partial_x L(x, y), \partial_y(-L(x, y)))$$

donde  $\partial_x L(x, y)$ ,  $\partial_y(-L(x, y))$  representan los subdiferenciales de  $L(., y)$  y  $-L(x, .)$  respectivamente.

En [13] se prueba que  $T_L$  es monótono maximal segun la Definición 4.2.

Un operador punto silla tiene asociado el siguiente problema: Dados  $C_1 \subseteq \mathbb{R}^n$  y  $C_2 \subseteq \mathbb{R}^m$  conjuntos convexos y cerrados; el problema de punto silla es definido por: Hallar  $(x^*, y^*) \in C_1 \times C_2$  tal que

$$L(x^*, y) \leq L(x^*, y^*) \leq L(x, y^*) \quad \forall (x, y) \in C_1 \times C_2$$

El problema es llamado: problema de punto silla con restricciones ( $PSR(L, S_1, S_2)$ ); una solución  $(x^*, y^*)$  de  $PSR(L, S_1, S_2)$  es llamado un punto de silla. La conexión entre el  $PSR(L, S_1, S_2)$  y el operador punto silla  $T_L$  es dada en [14]; donde se establece que el problema  $PSR(L, S_1, S_2)$  es equivalente al problema: Hallar  $(x^*, y^*) \in C_1 \times C_2$  tal que  $0 \in T_L(x^*, y^*) + (N_{C_1}(x^*), N_{C_2}(y^*))$ .

Cuando  $T = T_L$  el problema de desigualdad variacional  $PDV(T_L, C_1 \times C_2)$  es equivalente al

problema  $PSR(L, S_1, S_2)$ ; esto se deduce de la equivalencia anterior y del ejemplo 4.3.  $\square$   
 Muchos otros problemas en optimización pueden ser formulados en forma de desigualdades variacionales. Por ejemplo en problemas de equilibrio de Nash de juegos no cooperativos de  $n$ -personas, el equilibrio generalizado de Nash, el problema de asignación de tráfico, en problemas generales de equilibrio, entre otros.

En este capítulo introducimos un algoritmo para resolver un  $PDV(T, C)$  en el espacio finito dimensional  $\mathbb{R}^n$ , en este algoritmo asumiremos que  $C$  es un conjunto convexo, cerrado y no vacío; este algoritmo se puede ver como una extensión del clásico método del gradiente proyectado para optimización con restricciones. Bajo las condiciones para  $T$  de ser monótono maximal y paramonotono se mostrara que la sucesión generada es globalmente convergente a un elemento de  $S(T, C)$  asumido no vacío.

Muchas de las definiciones y resultados dadas en esta sección son extendidos para espacios de Hilbert en general, en este trabajo solo no centraremos en algunos resultados básicos y necesarios sobre operadores monótonos en  $\mathbb{R}^n$  que serán utilizados para la convergencia de nuestro algoritmo; para mayor información sobre teoría de operadores monótonos puede consultar por ejemplo [13], [14],[15], [16] y [17].

**Definición 4.1** *i) El dominio de  $T$  es el conjunto  $Dom(T) = \{x \in \mathbb{R}^n : T(x) \neq \emptyset\}$   
 ii) El grafico de  $T$  es el conjunto  $G(T) = \{(x, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, v \in T(x)\}$   
 iii)  $T$  es localmente acotado en  $x$  si existe una vecindad  $U$  de  $x$  tal que el conjunto  $T(U) = \bigcup_{x \in U} T(x)$  es acotado en  $\mathbb{R}^n$ .*

**Definición 4.2** *Sea  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow P(\mathbb{R}^n)$  un operador punto conjunto*

*i)  $T$  es monótono si y solo si  $\langle u - v, x - y \rangle \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{R}^n$  y  $\forall u \in T(x), v \in T(y)$   
 ii)  $T$  es monótono maximal si  $T$  es monótono y adicionalmente  $T = T'$  para todo operador monótono  $T' : \mathbb{R}^n \rightarrow P(\mathbb{R}^n)$  tal que  $G(T) \subseteq G(T')$ .*

#### Observación 4.1

La definición de operador monótono puede verse como una extensión de la clásica definición de función monótona no decreciente para una función real de variable real  $f : \forall x, y \in dom(f)$  con  $x \leq y$  implica  $f(x) \leq f(y)$  es inmediato verificar que esta desigualdad es equivalente a  $(x - y)(f(x) - f(y)) \geq 0$  para todo  $x, y \in dom(f)$  con  $x \geq y$ , esta formulación es extendida inmediatamente a  $\mathbb{R}^n$  y en general a espacios con producto interno reemplazando el producto en  $\mathbb{R}$  por el producto interno. De manera mas general esta propiedad puede ser extendida a operadores en espacios de Banach en su dual, donde el producto interno es sustituido por el producto de dualidad ver [16].  $\square$



Damos algunos ejemplos de operadores monótonos y operadores monótonos maximales

#### Ejemplo 4.5

Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  una función propia y convexa, entonces el operador  $\partial f$  de  $\mathbb{R}^n$  en  $P(\mathbb{R}^n)$  es monótono maximal. La prueba de la monotonia es inmediato de la definición, la maximilidad es provada en [18].

Existe un resultado mas general cuando el operador es definido sobre un espacio de Banach en su dual en ese caso es necesario ademas imponer la condición de semicontinuidad superior para  $f$ , ver [18].

#### Ejemplo 4.6

Considere la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow P(\mathbb{R})$  definida por  $f(x) = 0$  si  $x < 0$ ,  $f(x) = 1$  si  $x > 0$  y  $f(0) = A$  donde  $A$  es un subconjunto cualquiera de  $[0, 1]$  es inmediato verificar que  $f$  es monótona; ademas  $f$  es monótono maximal si y solo si  $f(0) = [0, 1]$ .

#### Ejemplo 4.7

Sea  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  un conjunto cerrado y consideremos el operador proyección dado por  $\Pi_C(x) = \{u \in C :: \|x - u\| = d(C, x)\}$  este conjunto es no vacio por el Lema 1.2, en el caso que  $C$  es ademas convexo entonces  $\Pi_C(x) = P_C(x)$ ; se tiene que  $\Pi_C(x)$  es monótono en efecto sea  $u \in \Pi_C(x)$  y  $v \in \Pi_C(y)$ , entonces  $\|x - u\| \leq \|x - v\|$  y  $\|y - v\| \leq \|y - u\|$  elevando al cuadrado ambas desigualdades y sumando se tiene  $\|x - u\|^2 + \|y - v\|^2 \leq \|x - v\|^2 + \|y - u\|^2$  desarrollando cada termino y simplicando obtenemos  $-\langle x, u \rangle - \langle y, v \rangle \leq -\langle x, v \rangle - \langle y, u \rangle$

#### Ejemplo 4.8

Un operador lineal  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es monótono maximal si y solo si  $\langle T(x), x \rangle \geq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ , por ejemplo el operador de rotación de un ángulo de  $\frac{\pi}{2}$  dado por  $T(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$  es monótono maximal.

**Definición 4.3**  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow P(\mathbb{R}^n)$  es llamado paramonotono si y solo si  $T$  es monótono y  $\langle u - v, x - y \rangle = 0$  con  $x, y \in \mathbb{R}^n, u \in T(x), v \in T(y)$  implica  $u \in T(y)$  y  $v \in T(x)$ .

### Ejemplo 4.9

Si  $T$  es el subdiferencial de una función convexa entonces  $T$  es paramonotono, ver Proposición 2.2 in [17].

### Ejemplo 4.10

Si  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es monótono y diferenciable, y  $JT(x)$  denota la matriz jacobiana de  $T$  en  $x$ , entonces  $T$  es paramonotono si y solo si  $\text{Rang}(JT(x) + JT^t(x)) = \text{Rang}(JT(x))$  para todo  $x$ , ver Proposición 4.2 in [17].

**Definición 4.4** Sea  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  un conjunto convexo y cerrado,  $\xi \geq 0$  y  $x \in \mathbb{R}^n$ . Un punto  $p_x \in C$  es llamado una  $\xi$ -proyección de  $x$  en  $C$ , si  $p_x$  satisface:

$$\frac{1}{2} \|x - p_x\|^2 \leq \frac{1}{2} \|x - P_C(x)\|^2 + \xi.$$

La  $\xi$ -proyección  $p_x$  de  $x$  en  $C$ , es caracterizada por:

$$\langle x - p_x, p_x - y \rangle \geq -\xi \quad \forall y \in C$$

De la definición es inmediato observar que  $p_x \in C$  existe, pero no es necesariamente único. Si  $\xi = 0$  entonces  $p_x = P_C(x)$ .

**Lema 4.1** Sean  $(v_k)$  y  $(u_k)$  sucesiones no negativas de números reales que satisfacen  $v_{k+1} \leq v_k + u_k$  con  $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k < +\infty$  entonces la sucesión  $(v_k)$  es convergente.

### Prueba

Sea  $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = u$ , como  $v_{k+1} \leq v_k + u_k$  entonces tomando suma desde  $k = 0$  hasta  $k = m - 1$  se tiene  $v_m \leq v_0 + u$  entonces  $(v_k)$  es acotada, entonces existe una subsucesión  $(v_{k_j})$  que converge a un punto  $v$ . Veamos que  $v_k \rightarrow v$ .

Dado  $\epsilon > 0$  existe  $j_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $|v - v_{j_0}| < \frac{\epsilon}{2}$  y para cada  $k > j_0$  se tiene  $\sum_{i=j_0}^{k-1} u_i < \frac{\epsilon}{2}$ , de la hipótesis es fácil ver que para toda  $k > p$  se tiene

$$|v_k - v_p| \leq \sum_{i=p}^{k-1} u_i$$

tomando  $p = j_0$  en la desigualdad anterior y usando la desigualdad triangular tenemos:

$$|v_k - v| \leq |v_{j_0} - v| + |v_{j_0} - v_k| < \frac{\epsilon}{2} + \sum_{i=j_0}^{k-1} u_i < \epsilon \quad \text{para toda } k > j_0$$

luego  $v_k \rightarrow v$ .  $\square$

**Lema 4.2** Sean  $\theta, \beta$  y  $\xi$  números reales no negativos satisfaciendo  $\theta^2 - \beta\theta - \xi \leq 0$  entonces

$$\beta\theta \leq \beta^2 + \xi.$$

### Prueba

Consideremos la función cuadrática  $g(x) = x^2 - \beta x - \xi$ , de la hipótesis se tiene  $g(\theta) \leq 0$  entonces se tiene que  $0 \leq \theta \leq \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\xi}}{2}$  multiplicando esta desigualdad por  $\beta$  y usando  $ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$  se tiene

$$\beta\theta \leq \frac{1}{2} \left[ \beta^2 + \beta\sqrt{\beta^2 + 4\xi} \right] \leq \frac{1}{2} \left[ \beta^2 + \frac{\beta^2 + \beta^2 + 4\xi}{2} \right] = \beta^2 + \xi$$

esto termina la prueba.  $\square$

**Teorema 4.1** Sea  $T$  un operador paramonotono en  $C$ . Tomemos un  $x \in S(T, C)$  y  $x^* \in C$ . Si existe  $u^* \in T(x^*)$  tal que  $\langle u^*, x^* - x \rangle = 0$ , entonces  $x^*$  es también solución del PDV( $T, C$ ).

### Prueba

Ver Proposición 2.3 in [17].

**Lema 4.3** Sea  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow P(\mathbb{R}^n)$  un operador monótono maximal y  $C$  un conjunto convexo y cerrado. Entonces

- i)  $T$  es localmente acotado en todo punto del interior de su dominio.
- ii)  $G(T)$  es cerrado.
- iii) Sea  $C$  un subconjunto cerrado y  $C \subseteq \text{int}(\text{Dom}(T))$  entonces  $T$  es acotado en subconjuntos acotados de  $C$ .
- iv) Si  $T$  es un operador punto a punto entonces  $T$  es continuo.

### Prueba

- i) Ver Teorema 4.6.1(ii) de [13].
- ii) Ver Proposición 4.2.1(ii) de [13].
- iii) Sea  $X \subseteq C$  acotado entonces para algun  $r > 0$ ,  $X \subseteq B[0, r]$  entonces  $X \subseteq K = C \cap B[0, r]$  donde  $K$  es compacto, como  $T$  es localmente acotado para cada  $x \in K$  existe  $U_x$  tal que  $T(U_x)$  es acotado, por otro lado  $\{U_x\}$  es un cubrimiento abierto de  $K$  por el teorema de Borel-Lebesgue existe un conjunto finito  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq K$  tal que  $K \subseteq \cup_{i=1}^n U_{x_i}$  entonces  $T(K)$  es acotado asi  $T(X)$  es acotado.
- iv) Ver Teorema 4.6.3 de [13].

**Lema 4.4** Sea  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow P(\mathbb{R}^n)$  un operador monótono maximal y  $C$  un conjunto convexo y cerrado, entonces  $S(T, C)$  es no vacio convexo y cerrado.

### Prueba

Ver Lema 2.4(ii) de [19].

**Proposición 4.1** Sea  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow P(\mathbb{R}^n)$  un operador monótono punto a conjunto y  $C$  un subconjunto convexo y cerrado de  $\mathbb{R}^n$ . Consideremos el problema de desigualdad variacional  $PDV(T, C)$ . Si  $x = P_C(x - \beta u)$  para algun  $\beta > 0$  y  $u \in T(x)$  entonces  $x \in S(T, C)$ .

### Prueba

Usando el Lema 1.3 se obtiene:  $\langle x - \beta u - x, z - x \rangle \leq 0$  para todo  $z \in C$  esto implica que  $\langle u, z - x \rangle \geq 0$  para todo  $z \in C$ , como  $u \in T(x)$  entonces  $x \in S(T, C)$ .  $\square$

## 4.2. El Algoritmo

### Algoritmo para el PDV(T,C)

Tomemos un  $p > 0$  y sucesiones de números reales  $(\rho_k)$ ,  $(\beta_k)$  y  $(\zeta_k)$  verificando las siguientes condiciones.

$\rho_k > p$ ,  $\beta_k > 0$ ,  $\zeta_k \geq 0$ ,  $\forall k = 0, 1, \dots$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta_k}{\rho_k} = \infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k^2 < \infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \zeta_k < \infty \quad (30)$$

**Paso 0** Tomamos  $x_0 \in C$ .

**Paso 1** Sea  $x_k \in C$ . Hallamos  $u_k \in T(x_k)$ , definimos

$$l_k = \frac{\beta_k}{\gamma_k} \quad \text{donde} \quad \gamma_k = \max\{\rho_k, \|u_k\|\} \quad (31)$$

**Paso 2**

Calculamos  $x_{k+1} \in C$  tal que :

$$\langle x_k - l_k u_k - x_{k+1}, x_{k+1} - x \rangle \geq -\zeta_k \quad \forall x \in C \quad (32)$$

nótese que el punto  $x_{k+1}$  es una  $\zeta_k$ -proyección de  $x_k - l_k u_k$  en  $C$ , en particular si  $\zeta_k = 0$ , entonces  $x_{k+1} = P_C(x_k - l_k u_k)$ .

En la versión exacta del algoritmo se toma  $\zeta_k = 0$ , para todo  $k = 0, 1, \dots$  y por ejemplo  $p_k = 1$ . Por otra parte se toma como criterio de parada el de hallar  $x_k$  tal que  $u_k = 0$  o  $x_k = x_{k+1}$ . Este algoritmo puede ser usado también para operadores punto a punto.

### 4.3. Convergencia y Análisis del algoritmo

Primero estableceremos la validez de los criterios de parada para el caso exacto.

**Proposición 4.2** Si  $0 \in T(x_k)$  o  $x_{k+1} = x_k$  para algun  $k$  entonces  $x_k \in S(T, C)$ .

**Prueba**

Si  $0 \in T(x_k)$  entonces es claro que  $x_k \in S(T, C)$ . Si  $x_{k+1} = x_k$  el resultado sigue de la Proposición 4.1.  $\square$

**Lema 4.5** Para cada  $k = 0, 1, \dots$  las siguientes desigualdades ocurren:

- (i)  $l_k \|u_k\| \leq \beta_k$
- (ii)  $\beta_k \|x_{k+1} - x_k\| \leq \beta_k^2 + \zeta_k$

**Prueba**

Veamos i.

$$l_k \|u_k\| = \frac{\beta_k \|u_k\|}{\max\{\rho_k, \|u_k\|\}} \leq \beta_k$$

Veamos *ii*.

Tomando  $x = x_k$  en (32) resulta:

$$-\langle l_k u_k, x_{k+1} - x_k \rangle - \|x_k - x_{k+1}\|^2 \geq -\zeta_k$$

luego utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la parte (i) tenemos:

$$\begin{aligned} \|x_k - x_{k+1}\|^2 &\leq \langle l_k u_k, x_k - x_{k+1} \rangle + \zeta_k \leq l_k \|u_k\| \|x_k - x_{k+1}\| + \zeta_k \\ &\leq \beta_k \|x_k - x_{k+1}\| + \zeta_k \end{aligned}$$

el resultado sigue del Lema 4.2, tomando  $\theta = \|x_k - x_{k+1}\|$ ,  $\beta = \beta_k$  y  $\xi = \zeta_k$ .  $\square$

Para continuar asumiremos que:

$$H_1 : S(T, C) \neq \emptyset.$$

**Teorema 4.2** *Asumamos que  $S(T, C) \neq \emptyset$  entonces para cada  $x^* \in S(T, C)$*

$$\|x_{k+1} - x^*\|^2 \leq \|x_k - x^*\|^2 + 2l_k \langle u_k, x^* - x_k \rangle + \delta_k \quad (33)$$

donde  $\delta_k = 2\beta_k^2 + 4\zeta_k$ .

### Prueba

Utilizando la identidad  $\|a - b\|^2 = \|c - b\|^2 - \|a - c\|^2 + 2\langle c - a, b - a \rangle$  tenemos:

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - x^*\|^2 &= \|x_k - x^*\|^2 - \|x_{k+1} - x_k\|^2 + 2\langle x_k - x_{k+1}, x^* - x_{k+1} \rangle \\ &\leq \|x_k - x^*\|^2 + 2\langle x_k - x_{k+1}, x^* - x_{k+1} \rangle \end{aligned}$$

utilizando esta última desigualdad y tomando  $x = x^*$  en (32) se tiene:

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - x^*\|^2 &\leq \|x_k - x^*\|^2 + 2\langle l_k u_k, x^* - x_{k+1} \rangle + 2\zeta_k \\ &= \|x_k - x^*\|^2 + 2\langle l_k u_k, x^* - x_k \rangle + 2\langle l_k u_k, x_k - x_{k+1} \rangle + 2\zeta_k \end{aligned}$$

aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y aplicando el Lema 4.5 parte (i) tenemos:

$$\|x_{k+1} - x^*\|^2 \leq \|x_k - x^*\|^2 + 2l_k \langle u_k, x^* - x_k \rangle + 2\beta_k \|x_k - x_{k+1}\| + 2\zeta_k$$

de esta última desigualdad y aplicando el Lema 4.5 parte (ii) resulta:

$$\|x_{k+1} - x^*\|^2 \leq \|x_k - x^*\|^2 + 2l_k \langle u_k, x^* - x_k \rangle + 2\beta_k^2 + 4\zeta_k \quad (34)$$

**Teorema 4.3** *Asumamos que las hipótesis  $H_1$  es satisfecha, entonces:*

- (i) *La sucesión  $(\|x_k - x^*\|^2)$  es convergente, para toda  $x^* \in S(T, C)$ .*
- (ii)  *$(x_k)$  es acotado.*
- (iii)  *$(u_k)$  es acotado.*

### Prueba

Veamos (i).

Como  $x^* \in S(T, C)$ , tenemos que  $\langle u^*, x_k - x^* \rangle \geq 0$ , como  $T$  es monótono tenemos que  $\langle u^* - u_k, x^* - x_k \rangle \geq 0$  para toda  $k = 0, 1, \dots$ , sumando estas dos desigualdades se tiene  $\langle u_k, x^* - x_k \rangle \leq 0$  entonces de (33) tenemos:

$$\|x_{k+1} - x^*\|^2 \leq \|x_k - x^*\|^2 + \delta_k \quad (35)$$

donde  $\delta_k = 2\beta_k^2 + 4\zeta_k$ ; de (30) se tiene:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \delta_k < +\infty \quad (36)$$

así de (35) y (36) y usando el Lema 4.1 resulta que  $(\|x_k - x^*\|^2)$  es convergente.

La parte (ii) es inmediata a partir de (i).

Para la acotación de  $(u_k)$ , usamos la acotación de  $(x_k)$  y el Lema 4.3 parte (iii).  $\square$

**Teorema 4.4** *Supongamos que  $H_1$  ocurre, se tiene que:*

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \langle u_k, x^* - x_k \rangle = 0, \quad \forall x^* \in S(T, C)$$

### Prueba

Sea  $x^* \in S(T, C)$  usando (33) tenemos para cada  $k = 0, 1, \dots$

$$0 \leq 2l_k \langle u_k, x_k - x^* \rangle \leq \|x_k - x^*\|^2 - \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \delta_k \quad (37)$$

tomando suma de  $k = 0$  hasta  $k = m$  tenemos:

$$\begin{aligned} 0 \leq 2 \sum_{k=0}^m l_k \langle u_k, x_k - x^* \rangle &\leq \|x_0 - x^*\|^2 - \|x_{m+1} - x^*\|^2 + \sum_{k=0}^m \delta_k \\ &\leq \|x_0 - x^*\|^2 + \sum_{k=0}^m \delta_k \end{aligned}$$

haciendo  $m \rightarrow +\infty$  se tiene por (36) que:

$$0 \leq \sum_{k=0}^{+\infty} l_k \langle u_k, x_k - x^* \rangle < +\infty \quad (38)$$

Como  $(u_k)$  es acotada existe un  $L > \rho$  tal que  $\|u_k\| \leq L$  para toda  $k = 0, 1, \dots$  por otro lado.

$$\frac{\gamma_k}{\rho_k} = \max \{1, \rho_k^{-1} \|u_k\|\} \leq \frac{L}{\rho} \quad \text{para } k = 0, 1, \dots$$

además

$$l_k = \frac{\beta_k}{\gamma_k} \geq \frac{\rho\beta_k}{L\rho_k} \quad \forall k = 0, 1, \dots \quad (39)$$

de (38) y (39) tenemos

$$0 \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\beta_k}{\rho_k} \langle u_k, x_k - x^* \rangle < +\infty \quad (40)$$

de (30) y (40) se obtiene el resultado.  $\square$

**Lema 4.6** *Sea  $T$  un operador monótono maximal y paramonotono en  $\mathbb{R}^n$  y  $C$  un conjunto convexo y cerrado en  $\mathbb{R}^n$ . Sea  $\{(z_k, v_k)\} \subset G(T)$  una sucesión acotada tal que todos los puntos de acumulación de  $(z_k)$  pertenecen a  $C$ . Para cada  $x \in S(T, C)$  se define  $\gamma_k(x) = \langle v_k, z_k - x \rangle$ . Si para algun  $x \in S(T, C)$  existe una subsucesión  $(\gamma_{k_j}(x))$  tal que  $\lim_{j \rightarrow \infty} \gamma_{k_j}(x) \leq 0$ , entonces existe un punto de acumulación de  $(z_{k_j})$  que pertenece a  $S(T, C)$ .*

**Prueba.**

Supongamos que exista  $x \in S(T, C)$  y una subsucesión  $(\gamma_{k_j}(x))$  de  $(\gamma_k(x))$  tal que  $\lim_{j \rightarrow \infty} \gamma_{k_j}(x) \leq 0$ . Sea  $(z^*, v^*)$  un punto de acumulación de la sucesión acotada  $\{(z_k, v_k)\}$ . Como  $T$  es monótono maximal por el Lema 4.3(ii) se tiene que  $v^* \in T(z^*)$ . Sin pérdida de generalidad podemos asumir que  $\lim_{j \rightarrow \infty} (z_{k_j}, v_{k_j}) = (z^*, v^*)$ , por otro parte se tiene que  $\lim_{j \rightarrow \infty} \gamma_{k_j}(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} \langle v_{k_j}, z_{k_j} - x \rangle = \langle v^*, z^* - x \rangle$ . Como  $x \in S(T, C)$  entonces existe  $u \in T(x)$  tal que  $\langle u, z^* - x \rangle \geq 0$  y usando la monotonia de  $T$  tenemos:

$$0 \geq \lim_{j \rightarrow \infty} \gamma_{k_j}(x) = \langle v^*, z^* - x \rangle \geq \langle u, z^* - x \rangle \geq 0$$

luego  $\langle v^*, z^* - x \rangle = 0$  del Teorema 4.1 se concluye que  $z^* \in S(T, C)$ .  $\square$

**Teorema 4.5** *Asumamos que ocurre  $H_1$ . Entonces la sucesión  $(x_k)$  converge a un elemento de  $S(T, C)$ .*

**Prueba**

Sea  $x^* \in S(T, C)$  por el Teorema 4.4 existe una subsucesión  $(x_{k_j})$  de  $(x_k)$  tal que

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \langle u_k, x_k - x^* \rangle = \lim_{j \rightarrow \infty} \langle u_{k_j}, x_{k_j} - x^* \rangle = 0$$

por Lema 4.6 se tiene que existe un punto de acumulación de  $(x_{k_j})$  que pertenece a  $S(T, C)$  sin pérdida de generalidad tenemos que:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} x_{k_j} = \bar{x} \in S(T, C) \quad (41)$$



Por el Teorema 4.3 la sucesión  $(\|x_k - \bar{x}\|^2)$  es convergente de esto y de (41) se tiene que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \bar{x} \in S(f, C).$$

□

## 4.4. Ejemplo Numérico

### Ejemplo numérico 10

Consideremos el problema propuesto por Dafernos ver [20] sobre un patrón de tráfico para una simple red de transporte como muestra la Figura (37), con unicamente dos nodos  $x$ ,  $y$  y cinco enlaces  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2$  donde  $a_1, a_2, a_3$  son direcciones de  $x$  a  $y$  y  $b_1$  y  $b_2$  son los retornos de  $a_1, a_2$  respectivamente.

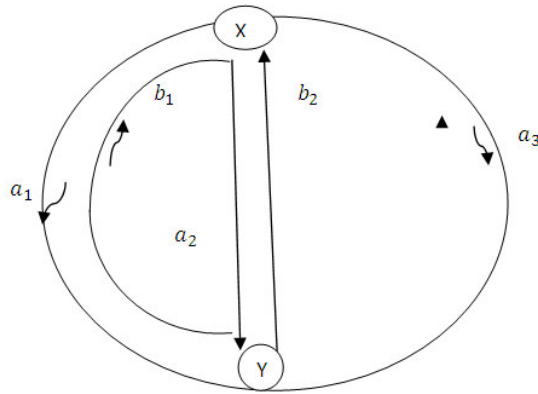


Figura 37:

La función del costo de viaje es dado por:

$$T(x) = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{a1} \\ x_{a2} \\ x_{a3} \\ x_{b1} \\ x_{b2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1000 \\ 950 \\ 3000 \\ 1000 \\ 1300 \end{bmatrix}$$

Donde el problema esta sujeto a las siguientes condiciones:

$$C = \{x \in \mathbb{R}_+^5 : x_{a1} + x_{a2} + x_{a3} = 210, x_{b1} + x_{b2} = 120\}$$

Para la implementación computacional con Matlab diseñamos dos programas uno para las proyecciones sobre  $C$  llamado proyec.m y otro para generar las iteraciones del metodo pdv.m

Una solución de este problema es  $x^* = (120, 90, 0, 70, 50)$  con  $T(x^*) = (2550, 2550, 3000, 2640, 2640)$  es fácil comprobar que la desigualdad  $\langle T(x^*), x - x^* \rangle \geq 0$  para todo  $x \in C$  es equivalente a  $450x_3 \geq 0$  para todo  $x \in C$ . Tomamos los pasos dados por  $\beta_k = \frac{100}{k+1}$  y tomemos como punto inicial  $(100, 80, 10, 50, 40)$  las iteraciones del método se muestran en la siguiente tabla.

iteración k	$x_k$
0	(100,80,10,50,40 )
13	( 116.8876 , 92.8793 , 0.2331 , 67.9570 , 52.0430)
14	( 117.0605 , 92.9395 , 0.0000 , 68.0171 , 51.9829)
30	( 117.5828, 92.4172, 0.0000, 68.5468 , 51.4532 )
50	(117.8769 , 92.1231, 0.0000 , 68.8243 , 51.1757)
60	( 117.9723 , 92.0277 , 0.0000 , 68.9107 , 51.0893 )
80	( 118.1133, 91.8867, 0.0000, 69.0349, 50.9651 )
100	(118.2154 , 91.7846, 0.0000 , 69.1219 , 50.8781 )
120	( 118.2942 , 91.7058, 0.0000, 69.1874, 50.8126 )
140	( 118.3579 , 91.6421 , 0.0000 , 69.2392 , 50.7608 )
160	( 118.4109 , 91.5891 , 0.0000, 69.2815 , 50.7185)
180	( 118.4561 , 91.5439 , 0.0000 , 69.3170 , 50.6830 )
200	( 118.4954 , 91.5046 , 0.0000 , 69.3474 , 50.6526 )

El tiempo transcurrido hasta la iteración 200 fue 12 segundos.

#### Observación 4.2

En [16] Proposición 3.2; se prueba que si  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  es un conjunto convexo con interior no vacío y  $T(x) = Ax + b$  entonces  $T$  es monótono en  $C$  si y solo si  $\tilde{A}$  es semidefinida positiva y  $T$  es paramonotono si y solo si  $\tilde{A}$  es semidefinida positiva y  $\ker(\tilde{A}) \subseteq \ker(A)$  donde  $\tilde{A} = \frac{1}{2}(A + A^t)$ ; para el ejemplo anterior la matriz  $A$  satisface estas condiciones.

# CAPITULO V

## 5. Una Extensión del Método Subgradiente al Caso Cuasiconvexo

### 5.1. Introducción

En esta parte del trabajo, extendemos el método del subgradiente para las funciones cuasiconvexas que satisfacen la condición de Holder sobre el conjunto optimal y probaremos un resultado de convergencia, para más información sobre el estudio y propiedades de las funciones cuasiconvexas ver [21].

**Definición 5.1** Una función  $f : C \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  se dice que satisface la condición de Holder con constante  $L > 0$  y grado  $\beta$  en  $x \in C$  si:

$$|f(x) - f(y)| \leq L \|x - y\|^\beta \quad \text{para cualesquiera } y \in C$$

Diremos que  $f$  satisface la condición de Holder en  $M \subseteq C$  sobre  $C$ , si la desigualdad anterior es válida para todo  $x \in M$ .

En particular si  $\beta = 1$  y se satisface la desigualdad anterior para toda  $x \in C$  entonces  $f$  es Lipschitziana en  $C$ .

**Definición 5.2** Una función  $f : C \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $C$  convexo, es llamada cuasiconvexa si para cualesquiera  $x, y \in C$  se verifica :

$$f(lx + (1 - l)y) \leq \max \{f(x), f(y)\} \quad \text{para cualesquiera } l \in [0, 1]$$

Es inmediato ver que toda función convexa es cuasiconvexa.

**Teorema 5.1** Sea  $f : C \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $C$  es un conjunto convexo y no vacío. La función  $f$  es cuasiconvexa si y solamente si el conjunto de nivel  $L_f(k) = \{x \in C :: f(x) \leq k\}$  es convexo para todo  $k \in \mathbb{R}$ .

**Prueba.**

Supongamos que  $f$  es cuasiconvexa y sean  $x, y \in L_k(f)$  entonces  $\max\{f(x), f(y)\} \leq k$ , sea  $z = lx + (1-l)y \in C$  con  $l \in [0, 1]$ , como  $f$  es cuasiconvexa tenemos  $f(z) \leq \max\{f(x), f(y)\} \leq k$  entonces  $z \in L_k(f)$  así  $L_k(f)$  es convexo.

Ahora supongamos que  $L_k(f)$  es convexo para cada  $k \in \mathbb{R}$ . Sean  $x, y \in C$  entonces  $x, y \in L_{\bar{k}}(f)$  eligiendo  $\bar{k} = \max\{f(x), f(y)\}$ . Sea  $z = lx + (1-l)y \in C$  con  $l \in [0, 1]$  por hipótesis  $L_{\bar{k}}(f)$  es convexo entonces  $z \in L_{\bar{k}}(f)$  entonces  $f(z) \leq \bar{k} = \max\{f(x), f(y)\}$  así  $f$  es cuasiconvexa.  $\square$

## 5.2. Hipótesis y Planteamiento del problema

Consideremos el problema :

$$f^* = \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

donde  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua y cuasiconvexa no necesariamente diferenciable y satisface la condición de Holder sobre el conjunto optimal  $X^*$ , que se asumirá no vacío, entonces es fácil comprobar que  $X^*$  es convexo y cerrado.

Dado un conjunto  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  denotamos por

$$N(X, x) = \{q \in \mathbb{R}^n : \langle q, y - x \rangle \leq 0, \quad \forall y \in X\}$$

en el caso de que  $x \in X$ , entonces la definición anterior coincide con la de cono normal (Definición 3.3). Es inmediato verificar que si  $M \subseteq H$  entonces  $N(H, x) \subseteq N(M, x)$ .

Para  $\epsilon \geq 0$  definimos el conjunto de nivel estricto de la función  $f$  dada por

$$G_\epsilon(x) = \{z \in \mathbb{R}^n; f(z) < f(x) - \epsilon\}$$

Es inmediato verificar que si  $x \in X^*$  entonces  $G_\epsilon(x) \neq \emptyset \Leftrightarrow 0 \leq \epsilon < f(x) - f^*$ , por simplicidad denotaremos  $G_0(x) = G(x)$ , nótese que  $G_\epsilon(x) \subseteq G(x)$  para toda  $\epsilon \geq 0$  así  $N(G(x), x) \subseteq N(G_\epsilon(x), x)$ .

Consideremos el conjunto

$$Q_\epsilon(x) = S(0, 1) \cap N(G_\epsilon(x), x).$$

Veamos que  $Q_\epsilon(x) \neq \emptyset$ , siempre que  $x \notin X^*$ .

Sea  $x \notin X^*$  y  $f^* - f(x) + \epsilon < 0$ , nótese primero que si  $b \in N(G_\epsilon(x), x)$  entonces  $\frac{b}{\|b\|} \in N(G_\epsilon(x), x)$ , ahora puesto que  $x \notin G_\epsilon(x)$  y  $G_\epsilon(x)$  es convexo entonces por el Teorema 1.9 existe  $a \neq 0$  tal que  $\langle a, y \rangle \leq \langle a, x \rangle$ , para toda  $y \in G_\epsilon(x)$  luego  $\langle a, y - x \rangle \leq 0$  para toda  $y \in G_\epsilon(x)$  entonces  $a \in N(G_\epsilon(x), x)$ , así  $\frac{a}{\|a\|} \in Q_\epsilon(x)$ .

Si  $f$  es una función convexa de las definiciones anteriores es fácil mostrar que para  $0 \leq \epsilon < f(x) - f^*$  se tiene  $\partial f(x) \subseteq \partial_\epsilon f(x) \subseteq N(G(x), x) \subseteq N(G_\epsilon(x), x)$ , es claro que para la primera y tercera inclusión solo es necesario imponer  $\epsilon \geq 0$ .

Estas inclusiones nos permite en analogía al método del subgradiente considerar el método iterativo dado por:

$$x_{k+1} = x_k - l_k q_k, \quad q_k \in Q_{\epsilon_k}(x_k), \quad l_k > 0$$

### Ejemplo 5.1

Para la función convexa  $f(x) = \max \{-x + 3, 1, x - 3\}$  y para  $x = 1 \notin X^*$  se tiene que  $\partial f(1) = \{-1\}$  y  $N(G(1), 1) = \langle -\infty, 0 \rangle$

## 5.3. El algoritmo y el análisis de la convergencia

**Teorema 5.2** *Sea  $f$  la función objetivo del problema cuasiconvexo satisfaciendo la condición de Holder con grado  $\beta > 0$  y constante  $L > 0$  en  $X^*$  sobre el conjunto  $\overline{G}(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n \setminus X^*$ , entonces para todo  $\epsilon \geq 0$  tal que  $f(x) - f^* > \epsilon$  tenemos:*

$$f(x) - L \langle q, x - x^* \rangle^\beta - \epsilon \leq f^*, \quad \text{para todo } q \in Q_\epsilon(x), x^* \in X^*. \quad (42)$$

### Prueba

Como  $f$  es continua y cuasiconvexa, se tiene que  $G_\epsilon(x)$  es convexo y abierto. En efecto veamos que es convexo, sean  $a, b \in G_\epsilon(x)$ , tomemos  $c = la + (1 - l)b$  con  $l \in [0, 1]$ , entonces

$$f(c) = f(la + (1 - l)b) \leq \max \{f(a), f(b)\} < f(x) - \epsilon$$

esto implica que  $c \in G_\epsilon(x)$  luego  $G_\epsilon(x)$  es convexo. Que es abierto se deduce de inmediato de la continuidad.

Sea  $x^* \in X^*$  y  $r = \inf \{\|z - x^*\|; z \in \partial G_\epsilon(x)\}$  puesto que  $\partial G_\epsilon(x)$  es cerrado y  $x^* \notin \partial G_\epsilon(x)$  entonces  $0 < r < \infty$ ; por la definición de infimo existe una sucesión  $(z_k) \subseteq \partial G_\epsilon(x)$  y  $(l_k) \subseteq \mathbb{R}^+$  con  $l_k \rightarrow 0$  tal que  $\|z_k - x^*\| \leq r + l_k$  para  $k = 0, 1, \dots$  y puesto que  $z_k \notin G_\epsilon(x)$  se tiene:

$$f(x) - f^* - \epsilon \leq f(z_k) - f^* \leq L \|z_k - x^*\|^\beta \leq L(r + l_k)^\beta$$

haciendo  $k \rightarrow \infty$ , se tiene

$$f(x) - f^* \leq Lr^\beta + \epsilon \quad (43)$$

Ahora, como  $G_\epsilon(x) \subseteq G(x)$  y por la elección de  $\epsilon \geq 0$  se tiene que  $x^* \in G_\epsilon(x)$ , así  $x^* + zr \in \overline{G}_\epsilon(x)$  para toda  $z \in S(0, 1)$ , de esto tenemos que  $\langle q, x^* + zr - x \rangle \leq 0$  para toda  $q \in Q_\epsilon(x)$ , tomando  $z = q$  se tiene:

$$r \langle q, q \rangle + \langle q, x^* - x \rangle \leq 0$$

así

$$r \leq \langle q, x - x^* \rangle \quad \forall q \in Q_\epsilon(x)$$

luego de (43) tenemos  $f(x) - f^* \leq L \langle q, x - x^* \rangle^\beta + \epsilon, \forall q \in Q_\epsilon(x), \forall x^* \in X^*. \square$

El teorema anterior puede verse como una extensión de la desigualdad básica del subgradiente  $\langle s, x^* - x \rangle + f(x) \leq f(x^*)$ , para  $L = 1, \beta = 1, \epsilon = 0$ .

Ahora damos el siguiente algoritmo para aproximar el punto óptimo del problema cuasiconvexo. Asumiremos conocido el valor óptimo  $f^*$ .

## Algoritmo

Dado un punto inicial  $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus X^*$  construimos una sucesión  $(x_k)$  de la siguiente manera

$$x_{k+1} = x_k - l_k q_k, \quad q_k \in Q_{\epsilon_k}(x_k), \quad l_k > 0$$

donde  $l_k$  es elegido como  $l_k = \gamma \left[ \frac{f(x_k) - f^* - \epsilon_k}{L} \right]^{\frac{1}{\beta}}$  con  $\gamma \in \langle 0, 2 \rangle$  y la sucesión  $(\epsilon_k)$  convergente a 0.

**Teorema 5.3** *Bajo las condiciones del teorema anterior, para la sucesión generada por el algoritmo anterior y para todo  $x^* \in X^*$  se tiene:*

$$\|x_{k+1} - x^*\|^2 \leq \|x_k - x^*\|^2 - \gamma(2 - \gamma) \left( \frac{f(x_k) - f^* - \epsilon_k}{L} \right)^{\frac{2}{\beta}} \quad (44)$$

## Prueba

De la definición del algoritmo tenemos

$$\|x_{k+1} - x^*\|^2 = \|x_k - l_k q_k - x^*\|^2 = \|x_k - x^*\|^2 - 2l_k \langle q_k, x_k - x^* \rangle + l_k^2$$

usando la definición de  $l_k$  y (42) tenemos:

$$\|x_{k+1} - x^*\|^2 \leq \|x_k - x^*\|^2 - 2\gamma \left[ \frac{f(x_k) - f^* - \epsilon_k}{L} \right]^{\frac{2}{\beta}} + \gamma^2 \left[ \frac{f(x_k) - f^* - \epsilon_k}{L} \right]^{\frac{2}{\beta}}$$

$$= \|x_k - x^*\|^2 - \gamma(2 - \gamma) \left[ \frac{f(x_k) - f^* - \epsilon_k}{L} \right]^{\frac{2}{\beta}}$$

lo que prueba el teorema.  $\square$

**Colorario 5.1** *Si todas las hipótesis del teorema anterior son satisfechas entonces*

- i)  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f^*$ .
- ii)  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = z \in X^*$ .

### Prueba

Se sigue de (44), que la sucesión  $(x_k)$  satisface

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq \|x_k - x^*\|, \forall x^* \in X^*$$

así  $(x_k)$  es Fejér convergente en  $X^*$  luego es acotada, entonces tiene un punto de acumulación, además de (44) tenemos :

$$\gamma(2 - \gamma) \sum_{i=0}^n \left[ \frac{(f(x_i) - f^* - \epsilon_k)}{L} \right]^{\frac{2}{\beta}} \leq \|x_0 - x^*\|^2$$

entonces

$$\sum_{i=0}^{\infty} (f(x_i) - f^* - \epsilon_i)^{\frac{2}{\beta}} < \infty$$

luego

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f^*$$

Ahora, si  $z$  es un punto de acumulación de  $(x_k)$  entonces por continuidad  $f(z) = f^*$  entonces  $z \in X^*$ , así por el Teorema 1.12 se tiene

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = z$$

esto prueba el teorema.  $\square$

## 5.4. Ejemplo Numérico

### Ejemplo numérico 11

Consideremos la función:

$$g(x) = \begin{cases} -2x - 1 & x \leq -1 \\ -x^3 & -1 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{x} - 2 & 1 \leq x \leq 9 \\ x - 8 & 9 \leq x \end{cases}$$

La función anterior es cuasiconvexa (ver Figura 38) pues todos sus conjuntos de nivel son convexos. Se tiene que  $X^* = \{1\}$  y  $f^* = -1$ , la función satisface la condición de Holder sobre  $X^*$  con  $L = 3$  y  $\beta = 1$ , implementamos el algoritmo :

$$x_{k+1} = x_k - l_k q_k$$

con  $l_k = \gamma \left[ \frac{(f(x_k) - f^*)}{L} \right]^{\frac{1}{\beta}}$  con  $\gamma \in \langle 0, 2 \rangle$  y  $q_k \in Q(x_k)$

Nótese que esta función no es diferenciable en  $x = -1$ ,  $x = 1$  y  $x = 9$ , también notamos que si  $x < 1$  entonces  $Q(x) = \{-1\}$  y si  $x > 1$  entonces  $Q(x) = \{1\}$  Implementamos en Matlab el programa quasi.m para obtener las iteraciones por el algoritmo propuesto.

La siguiente tabla muestra la iteración del método para  $\gamma = 0,4$  y tomando como punto inicial  $x_0 = 4$

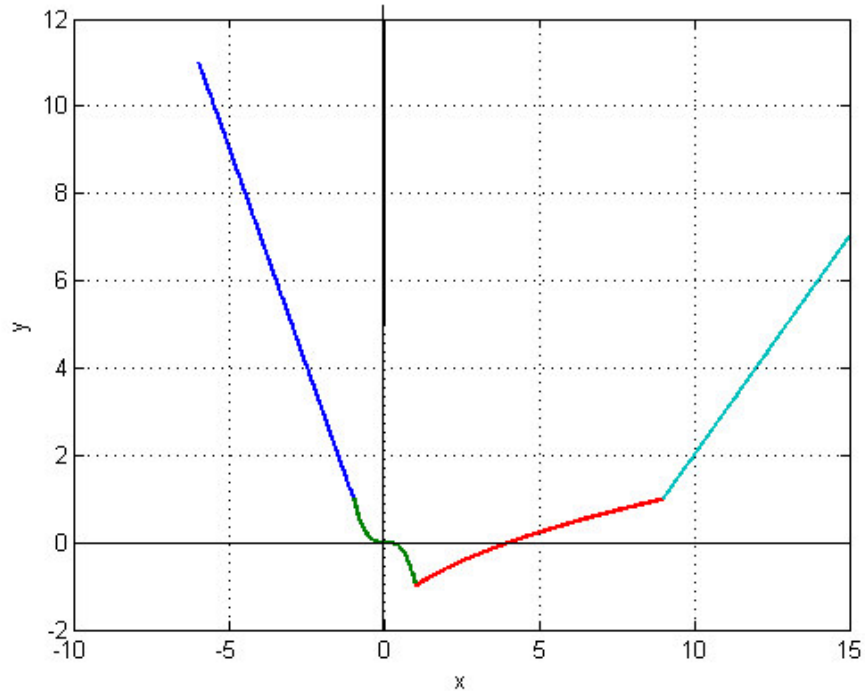


Figura 38: Gráfica de la función cuasiconvexa  $y=g(x)$



iteración k	$x_k$	$f(x_k)$
0	4	0
1	3.8667	-0.0336
2	3.7378	-0.0667
8	3.1581	-0.2229
15	2.5121	-0.4150
20	2.1543	-0.5323
30	1.6482	-0.7162
40	1.3493	-0.8384
50	1.1827	-0.9125
60	1.0938	-0.9542
70	1.0121	-0.9940

La siguiente tabla muestra las iteraciones del método para  $\gamma = 1$  y tomando como punto inicial  $x_0 = 3$ .

iteración k	$x_k$	$f(x_k)$
0	3	-0.2679
1	2.7560	-0.3399
2	2.5359	-0.4075
8	1.2002	-0.9045
10	1.1414	-0.9316
15	1.0582	-0.9713
20	1.0236	-0.9882
25	1.0095	-0.9952
30	1.0038	-0.9981
35	1.0015	-0.9992
40	1.0006	-0.9997
54	1	-1

La siguiente tabla muestra las iteraciones del método para  $\gamma = 1,7$  y tomando como punto inicial  $x_0 = \frac{5}{2}$ .

iteración k	$x_k$	$f(x_k)$
0	2.5	-0.4189
1	2.1707	-0.5267
2	1.9025	-0.6207
8	1.0156	-0.9922
10	1.0080	-0.9960
12	1.0041	-0.9979
16	1.0011	-0.9995
23	1.0001	-0.9999
26	1	-1

# CAPITULO VI

## 6. Conclusiones

La Optimización no diferenciable produce una serie de dificultades que, en la mayoría de veces, no pueden ser superadas por los algoritmos tradicionales para problemas diferenciables. Así, los problemas no diferenciables necesitan de técnicas propias para su desarrollo.

Los Métodos Subgradientes, desarrollados por Shor, fueron los pioneros en optimización no diferenciable. Poseen una estructura simple, pero, en general presentan baja velocidad de convergencia, generalmente producto de un zigzagado de primera especie.

En el capítulo 3, presentamos varios métodos que fueron propuestos en el sentido de mejorar la performance de los Métodos Subgradientes. Dentro de estos métodos, destacan los Métodos de proyección, desviación y condicional del subgradiente para resolver problemas de optimización no diferenciables.

A pesar de las desventaja en la velocidad de convergencia y en la del cálculo de un subgradiente, los Métodos Subgradientes son métodos prácticos por ser mucho más simples de implementar, y por su bajo costo computacional.

En el capítulo 4 presentamos un algoritmo para problemas de desigualdades variacionales bajo las hipótesis de monotocidad y paramonotocidad para el operador  $T$  sobre un conjunto convexo y cerrado  $C$ , para cuestiones de implementación computacional es necesario que el conjunto  $C$  tenga una estructura no tan compleja que permita poder calcular su proyección euclidiana de manera explícita.

Finalmente en el capítulo 5 establecimos la convergencia de un algoritmo, para minimizar una función cuasiconvexa no necesariamente diferenciable, utilizando las direcciones normalizadas del cono normal de los conjuntos de nivel de la función y elegimos los pasos basados en el conocimiento priori del valor óptimo de la función objetivo. En la parte de implementación computacional existe cierta dificultad en encontrar la constante  $L$ , el grado  $\beta$  y el cono normal de los conjuntos de nivel de la función para la función objetivo.

# Bibliografia

## Bibliografia

- [1] Dimitri P. Bertsekas, Convex Analysis and Optimization, Athena Scientific, 2003
- [2] Marko M Makela & Pekka Neittaanmaki, Nonsmooth optimization, world scientific, 1992.
- [3] Leonard D. Berkovitz, Convexity and Optimization in  $\mathbb{R}^n$ , Jhon Wiley and Sons, New York, 2002.
- [4] Constantin P. Niculescu, Lars-Erik Persson, Convex Functions And Their Applications, Springer, New York, September 2004.
- [5] Erik A. Papa Quiroz, Optimización Continua, 2009.
- [6] Jean-Pierre Crouzeix, Abdelkrim Keraghel, Wilfredo Sosa Sandoval , Programmation Mathématique Différentiable , Universidad National de Ingeniería, Lima- Perú ,2011.
- [7] Ross Baldick. Applied Optimization: Formulation and Algorithms for Engineering Systems, Cambridge University Press , (2006).
- [8] J. Nocedal and S. J. Wright, Numerical Optimization, Springer Series in operations Reserch. Springer, 1999.
- [9] D. G. Luenberger, Linear and Nonlinear Programming, 2nd Edition, Addison-Wesley, Massachusetts 1984.
- [10] N. Z. Shor, Minimization Methods for Non-Differentiable Functions, Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [11] Yu. Nesterov , Introductory Lectures on Convex Programming . Disponible en: <http://www.core.ucl.ac.be/~nesterov/Courses/INMA2460/Intro-nl.pdf>
- [12] N.Z. Shor, Minimization Methods for Non-Differentiable Function, Naukova Dumka, Kiev 1979.
- [13] Burachik, R.S., Iusem, A.N. Set-Valued Mappings and Enlargements of Monotone Operators. Springer, Berlin (2008).
- [14] José Yunier Bello Cruz, Direct Methods For Monotone Variatioanl Inequalities,Doctoral Thesis, IMPA, Rio de Janeriro-Brazil, 2009.
- [15] B.V. Dinh . L.D. Muu, Algorithms for Bilevel Pseudomonotone Variational Inequality Problems.

- [16] R.R. Phelps, Lectures on Maximal Monotone Operators, Extracta Mathematicae vol 12, Num, 193-230, Washington, (1997),
- [17] Alfredo N. Iusem, On Some Properties of Paramonotone Operators, Impa, Rio de Janeiro-Brazil, 1998.
- [18] Rockafellar, R.T. On the maximal monotonicity of subdifferential mapping. Pacific Journal of Mathematics 33 (1970) 209-216.
- [19] Bello Cruz, J.Y., Iusem, A.N. A strongly convergent direct method for monotone variational inequalities in Hilbert spaces. Numerical Functional Analysis and Optimization 30 (2009) 23-36.
- [20] [2] S. Dafermos Traffic equilibrium and variational inequalities, Transportation Science, 14 (1980), pp.42-54.
- [21] Joaquim Antonio dos Santos G, Quasiconvex Optimización and Location Theory, Kluwer Academic Publishers, Netherlands 1998.